Calcul de manœuvre optimale d'évitement de collision en orbite pour un nanosatellite

Sariah Al Saati - 22 mai 2021

Table des matières

Introduction

Les dernières années ont vu l'apparition et le développement des nanosatellites à poussée électrique. Ces satellites sont caractérisés à la fois par une faible masse, mais également une très faible poussée. Les satellites à propulsion électrique présentent cependant des avantages importants. L'un des intérêts de ces satellites est leur faible coût de production et de développement, par rapport aux mastodontes géostationnaires par exemple. Ceci les rend plus accessibles dans le monde industriel, mais aussi dans monde de la recherche scientifique et universitaire auprès des étudiants. Leur faible masse et leur faible volume sont aussi des réels avantages quant à leur mise en orbite. De fait, une coiffe de Ariane5, par exemple, est limitée à un ou deux satellites géostationnaires, quand elle peut, pour le même volume, emporter un grand nombre de nanosatellites. Les professionnels peuvent ainsi développer des stratégies reposant non plus sur un nombre limité de gros satellites mais sur une constellation de nanosatellites à orbite bien plus basse. Un autre intérêt de ces nanosatellites est leur faible faible consommation en carburant. A manœuvre équivalente, la propulsion électrique consomme bien moins que la propulsion chimique, mais prend beaucoup plus de temps. Un ordre de grandeur intéressant est celui de passage d'un satellite de l'orbite de transfert géostationnaire (GTO) à l'orbite géostationnaire (GEO) : un satellite classique le fait en quelques jours quand cela prend plusieurs semaines, voire mois, pour un satellite à propulsion électrique.

Les nanosatellites évoluent donc préférentiellement en orbite basse. Or, depuis 70 ans, la conquête spatiale a laissé une grande quantité de déchets en orbite autour de la Terre, comme les restes de lanceurs, des satellites ayant fini leur vie mais restant toujours en orbite, ou les restes d'expériences militaires de destruction de satellites en orbite. Ces débris orbitent pour la plupart dans des orbites basses, ce qui augmente davantage la densité de cette région orbitale déjà chargée. Il existe des projets cherchant à nettoyer ces orbites des déchets qui y évoluent, mais avant que ces projets ne soient mis en application, la situation des débris en orbite restera problématique. La présence de ces déchets représentent un risque pour la flotte de satellites en place et à venir : une collision entre un satellite et un débris pourrait endommager le satellite, voire le détruire. On précise que, à l'échelle d'un seul satellite, ce risque de collision est assez faible (de l'ordre d'un accident tous les 5000 ans avec un débris d'un taille supérieure à 10 cm), mais quand on considère le nombre de satellites en orbite, ce risque devient non négligeable pour les constructeurs et les opérateurs de satellites, qui se trouvent alors dans la nécessite d'assurer une certaine garantie vis à vis de ce risque.

Pour un satellite donné, une manœuvre possible d'évitement de collision est de quitter momentanément son orbite puis d'y revenir une fois que le danger s'est écarté. Dans le cas d'un satellite classique, à propulsion chimique, cette solution est simple et rapide à mettre en oeuvre, et ne consomme que très peu de carburant. Cependant, cette manœuvre est plus laborieuse à mettre en oeuvre pour un Nanosat, du fait de la faible poussée disponible. La manœuvre prend plus de temps pour être mise en oeuvre, et doit être anticipée quelque temps en avance. De plus, tout au long de la manœuvre, le satellite n'est pas en mesure d'exécuter sa mission principale sur son orbite, ce qui représente donc une perte sèche pour l'opérateur de satellite. Il est donc important de chercher à minimiser le temps de manœuvre, en plus de chercher à optimiser le coût de cette manœuvre en carburant. **L'objectif de ce projet est le calcul de la manœuvre optimale d'évitement de collision, pour un nanosatellite.**

Le présent rapport est organisé comme suit. Dans une première partie, on décrit le travail théorique qui nous a permis de modéliser le problème et de l'exprimer avec un formalisme mathématique. Cette modélisation nous a permis de développer des calculs, qui nous ont amenés à proposer à la fin de cette première partie un algorithme de calcul numérique de manœuvre optimale. Dans une seconde partie, on décrit le travail d'implémentation numérique de l'algorithme identifié dans la première partie, et on analyse les résultats proposés par cet algorithme pour quelques exemples de problèmes d'évitement de collision. On s'intéresse dans une troisième partie à un approfondissement qu'il est possible d'apporter au travail présenté dans ce rapport pour des développements futurs. Après la conclusion, le lecteur pourra trouver trois annexes où l'ensemble des informations utiles et des résultats analytiques obtenus dans le cadre de ce projet sont repris en détail.

1 Analyse théorique

On s'intéresse dans cette partie à la formulation mathématique du problème d'évitement de collision en orbite, pour un nanosatellite muni de propulseurs électriques à faible poussée. On présentera donc dans cette partie la modélisation du problème proposée pour répondre à la problématique de notre projet. On verra ensuite que la modélisation proposée nous permettra de développer les calculs analytiques assez suffisamment pour identifier des manœuvres solutions de notre problème d'optimisation. L'ensemble des résultats obtenus nous permettront de proposer un algorithme de calcul de manœuvre optimale, que l'on présente à la fin de cette partie.

1.1 Modélisation du problème

On s'intéresse dans ce qui suit à la modélisation de notre problème d'optimisation de manœuvre. En effet, on cherche à déterminer la manœuvre optimale pour qu'un satellite en orbite basse puisse éviter un débris étant donné un risque de collision avéré. Le satellite est muni d'une propulsion électrique à faible poussée, telle que celle décrite dans l'introduction, située entre 0.3 et 1.1 mN. Les travaux et les calculs développés dans ce papier s'inspirent en très grande partie de la démarche présentée par Gazzino [6] dans sa thèse pour les satellites géostationnaires.

Ce problème d'optimisation de manœuvre aura donc une structure de problème de recherche de contrôle optimal. Il nous faut donc successivement identifier les éléments suivants :
— La dynamique du système étudié,
— L'expression des contraintes d'optimisation,
— Le coût de la manœuvre à optimiser.
On propose donc au lecteur de suivre cette démarche de recherche, dans ce qui suit.

1.1.1 Dynamique contrôlée

Le système étudié est constitué du satellite muni d'une propulsion électrique à faible poussée. Dans toute la suite, on représentera l'état du satellite avec les éléments orbitaux équinoxiaux, au moyen du vecteur

$$x(t) = \begin{bmatrix} a & e_x & e_y & i_x & i_y & M_Q(t) \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

On encourage très fortement le lecteur à se familiariser avec le contenu de l'annexe A qui reprend de façon synthétique l'ensemble des points importants de la mécanique spatiale. La représentation d'état du satellite est notamment abordée dans la partie A.2, et on introduit la représentation du vecteur d'état en éléments orbitaux équinoxiaux dans la partie A.2.3.

La propulsion électrique est modélisée au moyen d'un vecteur $u(t)$ écrit dans la base locale du satellite (consulter la partie A.1.2 pour l'introduction de la base orbitale locale) tel que

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_R(t) & u_T(t) & u_N(t) \end{bmatrix}^T_{\mathcal{B}_{OL}} \tag{2}$$

Ce vecteur $u(t)$ sera assimilé au contrôle dans notre problème de recherche de contrôle optimal. On précise que dans la suite, on travaillera avec un contrôle en accélération. Le contrôle en poussée $a(t)$ pouvant être calculé de la façon suivante :

$$a(t) = m * u(t) \tag{3}$$

où m représente tout simplement la masse du satellite. On encourage le lecteur à prendre connaissance du contenu de l'annexe C qui reprend de façon très synthétique les éléments à connaître au sujet de la propulsion électrique (l'équation 3 est une conséquence de l'équation 85 introduite dans l'annexe C).

Remarque : Dans la suite des calculs, on fera l'hypothèse que la masse du satellite est constante au cours de la manœuvre. Cette hypothèse a été émise en considérant la faible amplitude de poussée des propulseurs électriques et la durée supposée faible de la poussée (de l'ordre d'une journée) pour une manœuvre d'évitement de collision. Ainsi, pour une manœuvre d'une durée d'une journée, on peut calculer la variation de la masse totale du satellite grâce aux équations 82 et 86, et en prenant en compte la valeur de poussée maximale de l'ordre de 1mN. On obtient alors

$$\begin{aligned} |\delta m| &= |\dot{m}|\delta t && (4)\\ &= \frac{T}{c}\delta t && (5)\\ &= \frac{T}{\text{Isp } g}\delta t && (6)\\ &\approx 3.6 \text{ mg} && (7) \end{aligned}$$

à comparer avec la masse totale du satellite qui peut varier entre 1 et 10 kg.

Ainsi, à partir de la modélisation proposée, et à partir des résultats présentés en annexe A (équation 53), on est amené à considérer un système animé par la dynamique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K(x) + B(x)u \tag{8}$$

Les expressions des fonctions $x \mapsto K(x)$ et $x \mapsto B(x)$ sont données par les équations 54 et 55 respectivement. Ces fonctions ne sont pas linéaires en la variable $x(t)$.

La dynamique présentée dans l'équation 8 est celle d'un système orbital générique, muni d'une propulsion quelconque, et valable quelle que soit la manœuvre, dès lors que la masse du système puisse être considérée constante. Cette dynamique est adaptée par exemple au problème de changement d'orbite, où la trajectoire du satellite finale en fin de manœuvre est totalement différente de la trajectoire du satellite initiale en début de manœuvre. Or, dans notre cas particulier de manœuvre d'évitement de collision, on remarque que le satellite sera amené à rejoindre son orbite initiale à la fin de la manœuvre. Plus particulièrement, la trajectoire réelle du satellite $x(t)$ contrôlé par $u(t)$ ne devrait pas beaucoup s'éloigner de la trajectoire initiale $x_0(t)$ du satellite contrôlé par un contrôle arbitraire $u_0(t)$ connu à l'avance et fourni par l'opérateur du satellite, possiblement nul.

Ce constat nous amène à vouloir simplifier la dynamique présentée dans l'équation 8, en écrivant :

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t) \tag{9a}$$
$$u(t) = u_0(t) + \delta u(t) \tag{9b}$$

Le lecteur pourra consulter les détails des calculs présentés dans l'annexe B, et plus précisément dans la partie B.1 . On obtient alors le système dynamique suivant (équation 59), vérifié par les grandeurs $\delta x(t)$ et $\delta u(t)$:

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = A(t)\delta x + B(t)\delta u \tag{10}$$

L'expression des fonctions $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ peut être consultée à la fin de la partie B.1 (équations 60 et 61).

On a ainsi identifié la dynamique contrôlée vérifiée par le satellite au cours de la manœuvre.

1.1.2 Expression des contraintes

On cherche à identifier dans cette partie les contraintes à imposer aux variables d'état pour assurer l'évitement de collision entre le satellite et le débris. On présente ainsi plusieurs choix possibles de contraintes, et on discute de le pertinence de chaque choix en évaluant deux critères principaux :

— La garantie apportée par la contrainte à assurer un évitement de collision,
— La complexité des calculs analytiques, ou à défaut numériques, qui en découlent.

On suppose que l'on connaît :
— l'**instant** t_c prévu de la collision,
— la **position** $\overrightarrow{r_c}$ prévue de la collision dans le repère inertiel géocentrique,
— la **vitesse** $\overrightarrow{v_c}$ sur débris à l'instant t_c à la position $\overrightarrow{r_c}$.

On rappelle ensuite que la quantité $x(t)$ représente le vecteur état du satellite en éléments orbitaux équinoxiaux (6 coordonnées), alors que la quantité $\overrightarrow{r}(t)$ représente la position du satellite en éléments cartésiens (3 coordonnées). On est alors amené à considérer les choix de contrainte présentés dans la suite.

Évitement du point de collision à l'instant de collision : Une première stratégie consiste à considérer que l'évitement a bien eu lieu si le satellite évite bel et bien le point $\overrightarrow{r_c}$ où est prévue la collision à l'instant t_c prévu de la collision. Ainsi, un première modélisation de la contrainte d'évitement peut prendre la forme suivante :

$$\|\overrightarrow{r}(t_c) - \overrightarrow{r_c}\|_2 \geq R_c \tag{11}$$

où R_c correspond à une distance critique telle que l'on considère que l'évitement a bien eu lieu si le satellite et le débris sont séparés par une distance supérieure à R_c.

Évitement du point de collision : Une autre stratégie, plus laborieuse à mettre en place, mais plus robuste, consiste à vérifier qu'à tout instant, le satellite évite le point de collision prévu $\overrightarrow{r_c}$. Il s'agit d'une généralisation de la contrainte (11) à tout instant t, et on peut l'exprimer de la façon suivante :

$$\forall t, \|\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r_c}\|_2 \geq R_c(t) \tag{12}$$

où $R_c(t)$ est maintenant une fonction de l'incertitude sur le vecteur état $x(t)$, et est donc une fonction du temps.

Évitement des trajectoires : Enfin, une approche beaucoup plus robuste consiste à vérifier qu'à tout instant, le satellite et le débris gardent une distance relative suffisante pour considérer qu'il n'y ait aucun risque de collision. Cette approche nécessite de propager l'orbite du débris $x_{\text{débris}}(t)$ à partir des informations données par t_c, $\overrightarrow{r_c}$ et $\overrightarrow{v_c}$ et de vérifier la condition suivante à tout instant :

$$\forall t, \|\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}_{\text{débris}}(t)\| \geq R_c(t) \tag{13}$$

où $R_c(t)$ est maintenant une fonction de l'incertitude sur les vecteurs d'état $x(t)$ et $x_{\text{débris}}(t)$. On précise que la contrainte d'évitement repose bien sur les vecteurs position $\overrightarrow{r}$ et non pas les vecteurs d'état x.

Discussion : Le choix entre ces trois contraintes a été l'objet de discussions au cours de ce projet. Le choix final de la contrainte retenue pour la suite du travail a été la contrainte 11. En effet, bien que les contraintes 12 et 13 apportent une garantie plus importante d'évitement de collision, en assurant un suivi de la trajectoire du satellite pendant toute la durée de la manœuvre et non pas seulement à l'instant prévu de la collision, il apparaît qu'un tel suivi n'est pas forcément nécessaire pour assurer l'évitement de collision. En effet, une collision en orbite est un évènement rare et très peu probable à l'échelle de la manœuvre, comme l'indiquent les valeurs données dans le tableau 1. Étant donnée la répartition spatiale des trajectoires du satellite et du débris, il apparaît que le fait d'éviter la position de collision à l'instant prévu de la collision ne devrait pas entraîner un autre risque de collision avec ce même débris à un instant t situé au voisinage de l'instant t_c. Le risque que la manœuvre proposée par nos calculs provoque un risque élevé de collision avec ce même débris à un autre instant a donc été écarté de nos prévisions. On a donc retenu le choix de la contrainte 11, qui apporte un niveau de garantie fiable tout en permettant des calculs beaucoup plus simples que ne l'imposent les autres contraintes proposées.

On travaillera donc par la suite avec la contrainte d'évitement 11.

Taille du débris	> 0.1 mm	> 1 mm	> 1 cm	> 10 cm
Durée (an)	1	2	300	5000

TABLE 1 – Durée moyenne entre deux collisions pour un satellite sur une orbite circulaire à 900km d'altitude, en fonction de la taille du débris.

1.1.3 Expression des coûts

Le critère principal à optimiser au cours de cette manœuvre d'évitement de collision en orbite est la quantité de carburant consommée au cours de la manœuvre. D'après les éléments présentés dans l'annexe C (équation 87) autour de la propulsion électrique, optimiser le carburant consommé revient à optimiser la fonction

$$J_{\text{carburant}}(\delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \|\delta u(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \tag{14}$$

La prise en compte d'une telle fonction coût conduit à un contrôle optimal de type qui a un comportement "tout-ou-rien", de type "bang-bang", où le contrôle prend une valeur nulle pendant une certaine durée, puis prend une valeur maximale pendant une autre durée, de façon discontinue. Le passage du contrôle de la valeur nulle à sa valeur maximale se fait suivant l'évolution d'une fonction dite "fonction de commutation". Comme décrit par Gergaud et al. [7], puis par Martinon [8], la nature discontinue du contrôle optimal rend le problème d'optimisation difficile à résoudre. En revanche, la prise en compte du critère quadratique

$$J_{\text{énergie}}(\delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \|\delta u(t)\|_2^2 \,\mathrm{d}t \tag{15}$$

qui revient à minimiser le coût de la trajectoire en énergie, conduit à un problème bien plus régulier, avec un contrôle optimal continu. Ainsi, étant donnée une solution du problème d'optimisation obtenue en considérant le coût en énergie $J_{\text{énergie}}$ (15), il est possible d'approcher numériquement la solution du problème d'optimisation avec un coût en carburant $J_{\text{carburant}}$ (14) en considérant la classe de problèmes munie du critère

$$J_\lambda(\delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \lambda \|\delta u(t)\|_2 + (1-\lambda) \|\delta u(t)\|_2^2 \,\mathrm{d}t \tag{16}$$

On effectue alors une continuation de la forme "énergie vers carburant", par une méthode faisant intervenir la théorie de l'homotopie [8, 7].

Se pose alors la question de trouver le contrôle optimal avec un tel critère quadratique.

Dans notre cas précis, la prise en compte d'un critère quadratique présente un intérêt très fort. En effet, le coût quadratique présenté en 15, combiné avec la dynamique linéaire exprimée en 10, permettent de modéliser notre problème d'optimisation comme un problème Linéaire Quadratique. On présente plus précisément l'intérêt d'une telle modélisation dans la partie 1.1.5, mais on précise que l'intérêt principal d'une telle modélisation est celui de pouvoir obtenir l'expression analytique du contrôle optimal et de la trajectoire optimale de façon explicite en fonction du temps.

Ainsi, la modélisation de notre problème d'optimisation semble achevée. On a identifié la dynamique vérifiée par le satellite, la contrainte d'évitement ainsi que le coût de la trajectoire à minimiser. On discute dans le paragraphe suivant d'un dernier point de notre modélisation.

1.1.4 Paramétrisation

Le travail effectué dans les parties précédentes permet d'assimiler le problème d'optimisation étudié à un problème Linéaire Quadratique tel que défini dans [1], à l'exception près de la contrainte d'évitement formulée par l'équation 11, qui n'est pas linéaire.

On choisit d'introduire deux paramètres arbitraires supplémentaires, σ et γ, et on divise le problème étudié en deux sous problèmes. Dans le premier sous-problème, σ joue le rôle d'un point de l'espace des états à atteindre pour $t \in [t_0, t_c]$ qui permet d'assurer que la condition 11 soit vérifiée. Puis, dans un second sous-problème, on introduit le paramètre γ, un autre point de l'espace des états que le satellite va chercher à atteindre pour $t \in [t_f, t_f]$, qui permet d'assurer que $\delta x(t_f) = 0$ en fin de manœuvre. Ces paramètres sont pris en compte dans la partie suivante, dans la formulation finale du problème d'optimisation que l'on cherche à résoudre.

1.1.5 Formulation du problème d'optimisation

On présente donc dans cette partie la formulation du problème retenue après ce premier travail de modélisation. On est donc amené à résoudre successivement les deux problèmes Linéaires Quadratiques suivants :

$$\min_v \quad J_1(v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_c} \|v\|_2^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\delta x(t_c) - \sigma\|_2^2 \tag{17a}$$

$$\text{sujet à} \quad \forall t \in [t_0, t_c], \quad \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = A(t)\delta x + B(t)v \tag{17b}$$

$$\delta x(0) = 0 \tag{17c}$$

$$\sigma \quad \text{fixé} \tag{17d}$$

et

$$\min_v \quad J_2(v) = \frac{1}{2}\int_{t_c}^{t_f} \|v\|_2^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\delta x(t_f) - \gamma\|_2^2 \tag{18a}$$

$$\text{sujet à} \quad \forall t \in [t_c, t_f], \quad \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = A(t)\delta x + B(t)v \tag{18b}$$

$$\delta x(t_c) = \delta x(t_c) \tag{18c}$$

$$\gamma \quad \text{fixé} \tag{18d}$$

Les problèmes Linéaires Quadratiques sont une classe de problèmes d'optimisation dont la théorie a été profondément traitée dans les décennies précédentes. On dispose ainsi d'une série de résultats importants autour de cette classe de problèmes en particulier, que l'on va explorer dans la partie suivante.

1.2 Résolution analytique

Un résultat important autour de la classe des problèmes Linéaires Quadratiques provient de l'application du provient de l'application du principe du Minimum de Pontriaguine, et on invite le lecteur à consulter l'excellent cours MAP435 [1] dispensé aux élèves de deuxième année de l'École polytechnique. Un chapitre entier de ce cours est dédié à l'étude des problèmes Linéaires Quadratiques. Ce chapitre nous a beaucoup servi dans le travail présenté dans cette partie.

1.2.1 Manœuvre optimale et coût associé

On invite très fortement le lecteur à consulter l'annexe B, partie B.2 pour se familiariser avec les détails des calculs développés au cours de notre travail sur ce projet. On ne présente dans cette partie que les résultats principaux.

On définit :

$$\tilde{A}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s & \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ \displaystyle\int_{t_c}^{t} A(s)\mathrm{d}s & \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{19}$$

$$G = \int_{t_0}^{t_c} e^{\tilde{A}(t_c)-\tilde{A}(s)} B(s)B(s)^* e^{\tilde{A}(t_c)^*-\tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \tag{20}$$

$$\tilde{G} = \int_{t_c}^{t_f} e^{\tilde{A}(t_f)-\tilde{A}(s)} B(s)B(s)^* e^{\tilde{A}(t_f)^*-\tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \tag{21}$$

Alors, on obtient les résultats suivants :

$$\delta u(t) = \begin{cases} B(t)^* e^{\tilde{A}(t_c)^*-\tilde{A}(t)^*} \left(I_6 + G\right)^{-1} \sigma \quad \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ B(t)^* e^{\tilde{A}(t_f)^*-\tilde{A}(t)^*} \left(I_6 + \tilde{G}\right)^{-1} (\gamma - \delta x(t_c)) \quad \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{22}$$

$$\delta x(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\tilde{A}(t)-\tilde{A}(s)} B(s)B(s)^* e^{\tilde{A}(t_c)^*-\tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \left(I_6 + G\right)^{-1} \sigma \quad \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ \delta x(t_c) + \displaystyle\int_{t_c}^{t_f} e^{\tilde{A}(t)-\tilde{A}(s)} B(s)B(s)^* e^{\tilde{A}(t_f)^*-\tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \left(I_6 + \tilde{G}\right)^{-1} (\gamma - \delta x(t_c)) \\ \quad \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{23}$$

On mentionne la relation immédiate suivante :

$$\delta x(t_c) = G\left(I_6 + G\right)^{-1} \sigma = M\sigma \tag{24}$$

où M est définie dans l'équation 26b. Le terme $\delta x(t_c)$ est utilisé dans la deuxième partie de la fonction $\delta x(t)$.

On cherche aussi à exprimer le coût associé à cette trajectoire optimale, à partir des équations 17a et 18a. On remarque que dans ces deux expressions, seul le premier terme $\frac{1}{2}\int \|v\|_2^2 \, \mathrm{d}t$ correspond au coût de la manœuvre en énergie. Le second terme traduit le comportement du satellite à chercher à atteindre les points σ et γ de l'espace des états, introduits comme paramètres dans la partie 1.1.4. On en déduit donc le coût de la trajectoire en énergie :

$$J(\sigma, \gamma) = \frac{1}{2}\sigma^* L \sigma + \frac{1}{2}(\gamma - M\sigma)^* N (\gamma - M\sigma) \tag{25}$$

avec :

$$L = (I_6 + G)^{-1*} G (I_6 + G)^{-1} \tag{26a}$$
$$M = G(I_6 + G)^{-1} \tag{26b}$$
$$N = (I_6 + \tilde{G})^{-1*} \tilde{G} (I_6 + \tilde{G})^{-1} \tag{26c}$$

1.2.2 Optimisation des paramètres

La contrainte $\delta x(t_f) = 0$ s'exprime alors sous la forme :

$$C_1(\sigma, \gamma) = M\sigma + \tilde{G}\gamma = 0 \tag{27}$$

et la contrainte d'évitement s'exprime sous la forme :

$$C_2(\sigma, \gamma) = \|\overrightarrow{r}(x_0(t_c) + M\sigma) - \overrightarrow{r_c}\|_2 - R_c > 0 \tag{28}$$

On en déduit donc que les paramètres σ et γ sont les solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\sigma,\gamma} \quad J(\sigma, \gamma) \tag{29a}$$
$$\text{sujet à} \quad C_1(\sigma, \gamma) = 0 \tag{29b}$$
$$C_2(\sigma, \gamma) > 0 \tag{29c}$$

Il est possible de résoudre ce problème d'optimisation numériquement assez facilement. On remarque avec soulagement qu'il est tout à fait possible de trouver les valeurs optimales de σ et γ avant de se mettre à calculer les valeurs de $\delta u(t)$ et $\delta x(t)$. L'intérêt de tout ce travail de modélisation à donc été de transformer notre problème de contrôle optimal en dimension très importante (la dimension de l'espace de recherche de l'inconnue est égale au triple du nombre de pas de discrétisation de l'intervalle $[t_0, t_f]$ dans nos simulations, ce qui peut donner une dimension très grande), à un problème d'optimisation convexe en dimension 12, ce qui représente un gain très important.

1.3 Algorithme de calcul de manœuvre optimale

1.3.1 Contexte de réflexion

Dans l'étude que l'on vient de mener, on a supposé que le satellite n'était soumis à aucune perturbation en dehors de celle provoquée par le contrôle. En l'absence de contrôle, on a supposé que l'orbite du satellite étudié était parfaitement elliptique. Or, à faible altitude, les satellites sont soumis à un grand nombre de perturbations. On peut mentionner les forces de frottement avec l'air, ou la pression du vent solaire par exemple. Ceci nous pousse à conclure que pour le contrôle optimal donné par l'équation 22 obtenu dans la partie 1.2.1, la trajectoire réelle du satellite ne sera pas identique à la trajectoire calculée dans cette même partie et donnée par l'équation 23. Ce constat soulève un problème de garantie, car si la trajectoire réelle n'est pas identique à la trajectoire calculée, il n'est pas possible d'assurer que l'évitement de collision aura bien lieu. De plus, augmenter R_c dans l'équation 28 pour diminuer le risque de collision n'est pas une solution acceptable, car en voulant diminuer arbitrairement le risque de collision, on risque d'augmenter arbitrairement le coût de la manœuvre, et proposer une manœuvre prétendument optimale, mais qui ne le sera pas du tout.

La solution que l'on a retenue pour notre projet nous permettait de faire usage des résultats obtenus dans cette partie, tout en apportant une niveau de garantie fiable pour assurer l'évitement de collision. Numériquement, il était possible d'obtenir la trajectoire exacte du satellite en propageant son orbite et en prenant en compte les perturbations environnementales mais aussi en prenant en compte l'action du contrôle $u(t)$. La solution retenue consistait donc à alterner successivement entre notre capacité à calculer la trajectoire exacte en connaissant un contrôle, et notre capacité à calculer un contrôle optimal en connaissant la trajectoire du satellite et le contrôle auquel il est soumis au préalable. Ces observations nous ont permis de proposer un algorithme pour le calcul de la manœuvre optimale d'évitement de collision, que l'on présente dans la partie suivante.

1.3.2 Algorithme

L'algorithme proposé pour le calcul de la manœuvre optimale est donc le suivant :

- On note $u_0(t)$ le contrôle en accélération nulle,
- On note $x_0(t)$ la trajectoire initiale du satellite (qui peut être assimilée à une ellipse - voire un cercle - dans le cas non perturbé),
- On définit $i = 0$.

On définit un nombre d'itérations maximal (ou un critère d'arrêt) i_{max}.

Tant qu'il n y a pas eu d'évitement et que $i < i_{max}$:

- On calcule $x_{i+1}(t)$ approché et $u_{i+1}(t)$ grâce aux résultats de cette partie appliqués sur $x_i(t)$ réel et $u_i(t)$.
- On calcule $x_{i+1}(t)$ exacte grâce à une fonction de propagation appliquée avec $u_{i+1}(t)$.
- $i += 1$
- On visualise les données et vérifier qu'il y a bien eu évitement.

Conclusion de la première partie

Au cours de cette première partie du rapport, on a présenté la réflexion menée dans le cadre de ce projet qui nous a permis dans un premier temps de proposer une modélisation mathématique du problème étudié à partir des observations physiques faites sur ce problème. L'intérêt principal de cette modélisation a été de transformer le problème de contrôle optimal initial, problème complexe à résoudre numériquement à cause de la dimension de l'espace de recherche de l'inconnue $u(t)$, à un problème d'optimisation convexe dans $\mathbb{R}^{12}$ avec des contraintes continues. Cette modélisation a donc permis de simplifier grandement le problème et de permettre un calcul numérique de la manœuvre optimale beaucoup plus rapide et efficace. Dans un second temps, on a pu proposer un algorithme de calcul de manœuvre optimale d'évitement de collision qui permet de prendre en compte la dynamique réelle du satellite soumis aux perturbations de son environnement orbital. Après cette première partie du rapport très théorique, on va chercher dans la seconde partie de ce rapport à implémenter les résultats que l'on a obtenus, puis on va chercher à les valider à partir d'exemples de problèmes d'évitement de collision en orbite. La seconde partie de ce rapport nous permettra ainsi de caractériser la validité des résultats que l'on vient de présenter.

2 Implémentation numérique

On s'intéresse dans cette partie au travail d'implémentation numérique des résultats présentés dans la partie 1 et de l'algorithme de calcul de manœuvre optimale présenté dans la partie 1.3.2. On présentera donc dans un premier temps la structure générale du code écrit dans le cadre de ce projet. On détaillera les travaux qui ont permis de valider l'ensemble du code proposé. Dans un second temps, on s'intéressera à l'étude des solutions calculées par cet algorithme pour des problèmes d'évitement particuliers et on cherchera à caractériser la nature des solutions proposées par cet algorithme en fonction des caractéristiques du problème d'évitement (données d'entrée).

2.1 Implémentation numérique

On présente dans cette partie l'ensemble du code écrit dans le cadre de ce projet, qui nous a permis d'implémenter la solution de calcul de manœuvre optimale identifiée dans la partie 1.3.2.

2.1.1 Structure du code

Le code écrit a été réparti en trois modules de calculs principaux :
— ManoeuvreOptimale.py
— MonduleControle.py
— ModulePropagation.py

Deux modules supplémentaires ont été écrits pour l'implémentation de fonctions utiles pour les calculs effectués dans chacun des trois modules principaux. Ces modules supplémentaires sont
— prlUtils.py
— nlOptimization.py

On présente dans la figure 1 l'organigramme de programmation associé au module de calcul de manœuvre optimale. Le module principal ManoeuvreOptimale.py fait appel successivement au module ModulePropagation.py qui va propager l'orbite du satellite étant donné un contrôle u_i. Ensuite, une fois la trajectoire obtenue, on vérifie qu'il y a bien eu évitement de collision. Si ce n'est pas le cas, on calcule un nouveau contrôle $u_i(t)$ plus précis, et on réitère la propagation et la vérification de l'évitement. Le calcul s'arrête lorsqu'il y a bien eu évitement de collision, ou lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint, laissant entendre qu'il n'existe pas de manœuvre d'évitement accessible à partir des données d'entrée.

Le module proposé permet donc, à partir des conditions initiales, de calculer la manœuvre optimale qui permet d'éviter la collision prévue. Pour une utilisation optimale, en amont de notre module, un module

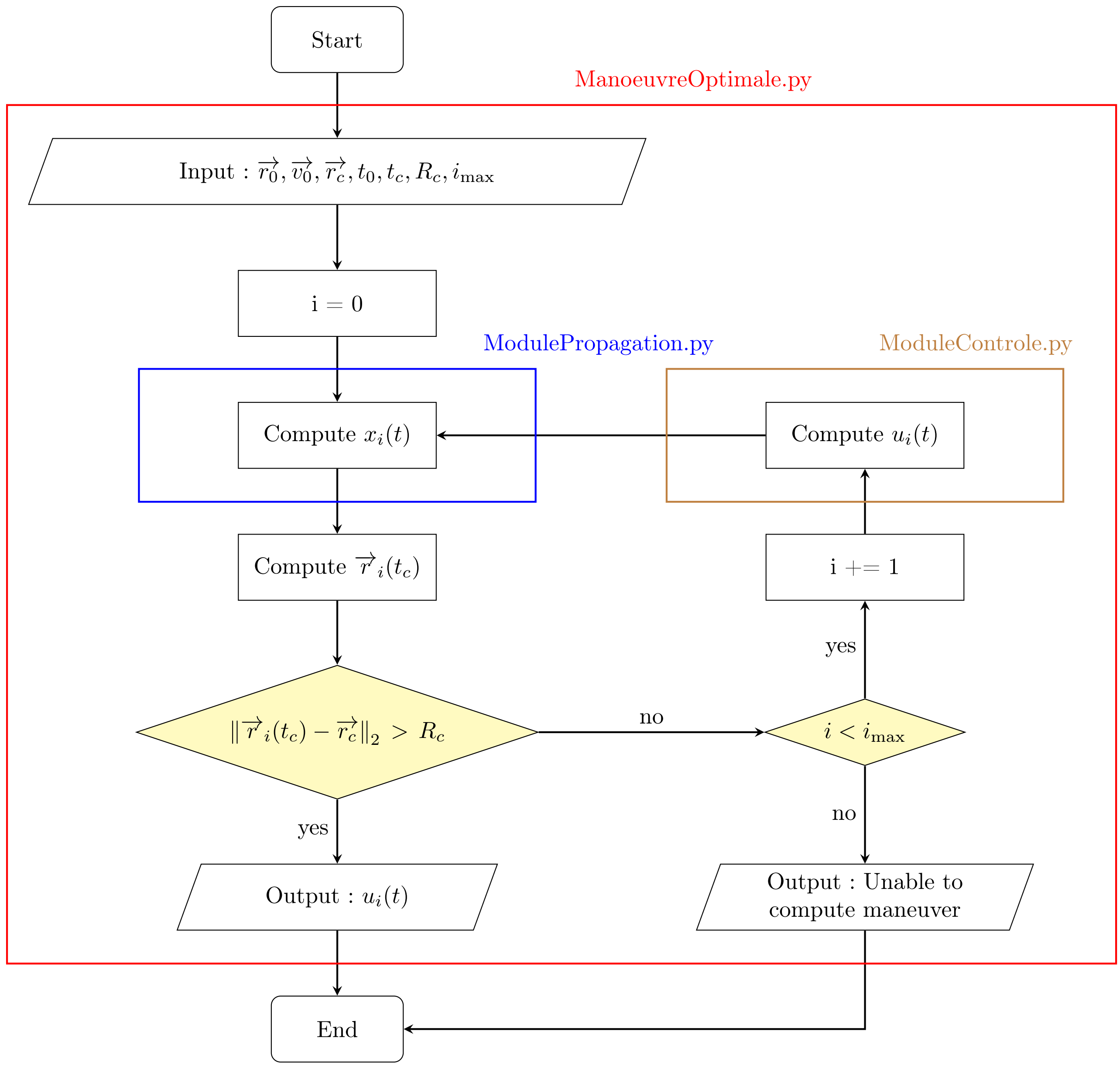


FIGURE 1 – Organigramme de programmation (flowchart) mettant en évidence la structure du code de calcul de manoeuvre optimale d'évitement de collision.

de calcul de risque de collision doit évaluer les risques auxquels est soumis le satellite d'étude. Dès qu'un risque de collision est avéré, le module de calcul de manœuvre d'évitement doit est activé pour identifier la manœuvre optimale.

D'un point de vue fonctionnel, l'ensemble du code a été codé avec le language Python, en utilisant principalement les librairies Poliastro [4] et Astropy [3]. Le module ModuleControle.py permet de porter numériquement l'ensemble des résultats obtenus dans la partie 1, en termes de calcul de contrôle optimal. Le module ModulePropagation.py permet de propager la trajectoire du satellite soumis à contrôle $u(t)$. Ces deux modules sont combinés au sein du module ManoeuvreOptimale.py comme indiqué dans la figure 1 pour calculer la manœuvre optimale dans les conditions réelles d'évolution en orbite. L'ensemble de ce code nécessite une vérification méthodique pour pouvoir être utilisé dans un contexte industriel. On présente dans la partie suivante l'ensemble des protocoles de vérification qui nous ont permis, dans un premier temps, d'identifier des erreurs dans le code et qui, dans un second temps, nous ont permis de valider ce code à notre niveau.

2.1.2 Validation du code

Le travail de validation a été une étape nécessaire au cours de ce projet. Il était nécessaire à notre niveau de vérifier le code de façon méthodique et de garantir que les calculs qui étaient supposés être menés par le code soient bien corrects. Dans le dépôt Git associé à ce projet, on pourra ainsi trouver un dossier **/validation/** qui reprend l'ensemble du travail de vérification et de validation du code.

Validation des modules La première étape de ce travail de vérification a été de vérifier le code morceau par morceau, fonction par fonction. Au cours du développement de l'ensemble des modules, on a procédé à des tests systématiques de l'ensemble des fonctions pour vérifier l'absence de bugs et la cohérence des résultats obtenus. Le dossier **/test/** du dépôt Git contient des scripts de test pour vérifier de façon continue le bon fonctionnement des modules implémentés. Cependant, ce travail de tests réguliers n'est pas suffisant. En particulier, il a fallu être très vigilants dans la vérification du module ModuleControle.py qui correspond à l'implémentation sur Python de l'ensemble des résultats obtenus sur le papier et présentés dans les annexes A et B. Pour la vérification de ce module, on a procédé à une vérification méthodique de tous les calculs qui y sont faits, en comparant les données calculées par ce module avec des données calculées à la main sur plusieurs scénarios de simulation. Pour chacun de ces scénarios, on a calculé à la main l'ensemble des coefficients des matrices qui interviennent dans les expressions analytiques et on les a comparés aux coefficients obtenus numériquement. Ce travail de vérification a été très utile pour identifier toute une série d'erreurs d'implémentation qui auraient pu fausser les calculs. Une conséquence importante de ce travail de vérification a été celle de confirmer l'exactitude du terme $b_{6,1}$ de la matrice donnée par l'équation 50 dans la partie A.3.2. En effet, dans la bibliographie, on avait constaté une erreur dans l'expression de ce coefficient, que l'on avait donc recalculé nous-même. Le travail numérique de vérification a alors permis de mettre en évidence l'erreur observée dans le terme obtenu dans la bibliographie et mesurer la correction apportée par le terme que l'on avait recalculé. L'ensemble de ces vérifications peut être consulté dans les fichiers associés dans le dossier **/validation/**. Ce travail de vérification méthodique, fonction par fonction, nous a donc permis une première validation de notre code.

Validation de bout en bout Le travail décrit dans le paragraphe précédent a donc permis de valider les calculs effectués par nos modules, fonction par fonction. Cependant, il est nécessaire de vérifier que la manœuvre calculée par notre code était bien la manœuvre optimale d'évitement de collision. Le protocole suivi pour ce travail de vérification a été le suivant :

- Considérer un problème d'évitement de collision avec des conditions très précises.
- Calculer à la main des manœuvres d'évitement classiques, qui semblent optimales en temps, en carburant ou même en simplicité de mise en oeuvre.
- Calculer la manœuvre optimale proposée par l'algorithme.
- Comparer les coûts des différentes manœuvres.

Ce travail de vérification est disponible dans les fichiers /validation/verif-Simulation.ipynb et /validation/verif-Simulation2.ipynb. On présente dans ce paragraphe les résultats obtenus. Les deux études ont été menées pour un satellite de la gamme Nanosat. Ce satellite est muni d'une propulsion électrique avec une poussée maximale de 1.1 mN. Le satellite évolue sur une orbite circulaire à basse altitude.

Le premier problème étudié est celui d'une collision prévue 35 min après le lancement de l'alerte. Pour un même critère d'évitement, on a identifié 4 manœuvres qui permettaient de garantir un évitement de collision et qui étaient relativement faciles à mettre en oeuvre. La manœuvre u_1 consistait à pousser dans la direction radiale, avec une poussée maximale, aussi tôt que possible et pendant une durée minimale. La manœuvre u_2 a été choisie identique à la manœuvre u_2, mais la poussée se faisait dans la direction tangentielle. La manœuvre u_3 consistait à réaliser cette manœuvre dans la direction normale, mais elle n'a pas permis d'assurer un évitement de collision. Enfin, les manœuvres u_4, u_5 et u_6 consistaient à pousser respectivement dans les directions radiale, tangentielle et normale le plus tard possible avant la collision, avec une poussée maximale. La manœuvre u_6 n'a pas permis d'assurer un évitement de collision. Le contrôle optimal calculé par l'algorithme est présenté dans la figure 2. On présente les résultats obtenus dans la table 2. Les contrôles u_3 et u_6 n'ont pas été représentés dans ce tableau.

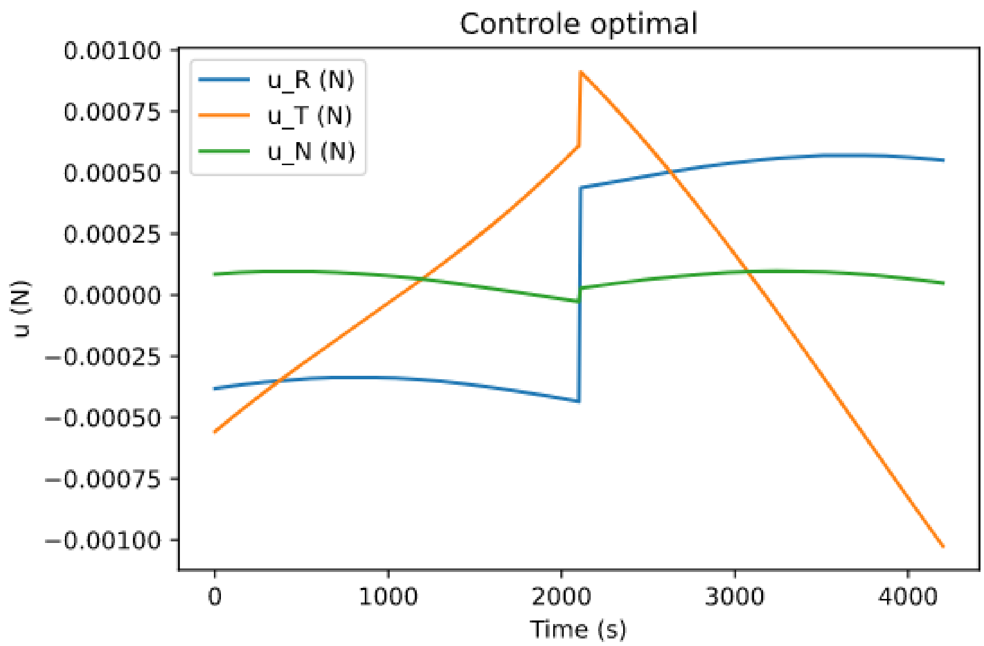


FIGURE 2 – Contrôle optimal pour le problème d'évitement considéré pour la première validation de bout en bout. L'alerte est donnée 35 min avant la collision, et on cherche à assurer une distance minimale entre le satellite et le débris de 500m. On constate que l'amplitude du contrôle ne dépasse pas l'amplitude maximale.

Le critère de coût retenu est le critère de coût en énergie, défini dans l'équation 15.

contrôle	optimal	1	2	4	5
Distance d'évitement (m)	488	505	515	496	491
Durée de propulsion (min)	35	12	9	28	30
Coût (10^{-5} m^2.s^{-3})	1.58	2.72	2.04	6.35	6.81

TABLE 2 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus pour la première expérience de validation. La distance minimale d'évitement était définie à 500m, avec une tolérance de 50m. L'alerte indiquant la collision a été donnée 35 min avant l'instant prévu de la collision.

Les résultats présentés montrent effectivement que le contrôle calculé par l'algorithme présente un coût plus faible que les contrôles considérés dans cette étude. On mentionne cependant l'intérêt des manœuvres u_1 et u_2 qui consistent à pousser très tôt (le plus tôt possible) avec une poussée maximale. Ces manœuvres ont pour effet de minimiser le temps de poussée nécessaire pour créer une distance suffisante avec le débris, ce qui génère un coût de manœuvre très faible (supérieur au coût optimal trouvé par l'algorithme, mais avec un temps de poussée presque trois fois plus faible).

Le deuxième problème étudié est similaire au premier, à la différence près que l'alerte est donnée 12 heures avant l'instant prévu de la collision. Les contrôles u_1, u_2, u_4 et u_5 suivent la même logique de manœuvre que les manœuvres du même nom dans l'expérience précédente. Pour la manœuvre u_3, on a constaté que la poussée dans la direction normale (poussée hors-plan) avait des effets très variables en fonction de la position du satellite sur son orbite au moment de la poussée. La stratégie suivie pour la manœuvre u_3 a donc été de pousser sur un même arc de cercle bien identifié de l'orbite du satellite, pendant plusieurs orbites. Entre deux passages sur ce même arc de cercle, les propulseurs étaient désactivés. Le contrôle optimal calculé par l'algorithme est présenté dans la figure 3. On présente les résultats obtenus dans la table 3.

Les résultats présentés montrent que le contrôle calculé par l'algorithme présente un coût bien plus faible

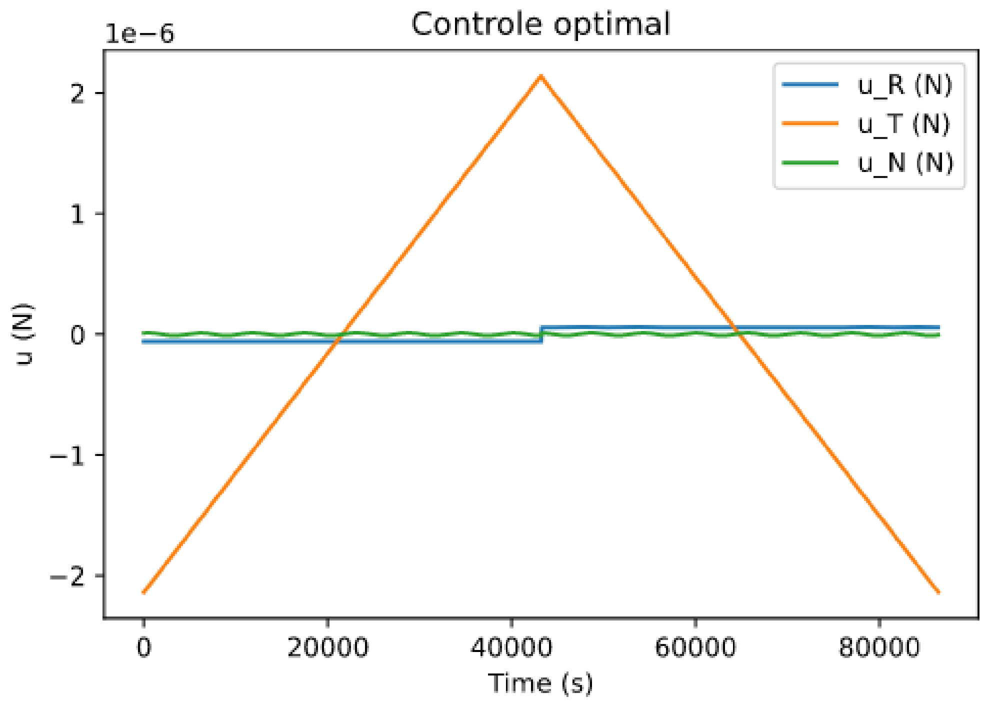


Figure 3 – Contrôle optimal pour le problème d'évitement considéré pour la deuxième validation de bout en bout. L'alerte est donnée 12h avant la collision, et on cherche à assurer une distance minimale entre le satellite et le débris de 500m.

contrôle	optimal	1	2	3	4	5
Distance d'évitement (m)	500	512	514	530	497	490
Durée de propulsion (min)	12(h)	9	1	42	28	30
Coût (10^{-5} m^2.s^{-3})	0.0002	2.04	0.013	1.0	6.35	6.81

Table 3 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus pour la deuxième expérience de validation. La distance minimale d'évitement était définie à 500m, avec une tolérance de 50m. L'alerte indiquant la collision a été donnée 12h avant l'instant prévu de la collision.

que toutes les manœuvres considérées : ce coût optimal présente un facteur 10^{-4} avec les coûts des manœuvres classiques, et un facteur 10^{-2} avec le coût de la manœuvre u_2. En considérant le contrôle u_2 et la figure 3, on est amené à constater que dans les conditions de ce problème au moins, la poussée dans la direction tangentielle semble être très efficace. La présence d'un facteur 10^{-4} entre le coût des manœuvres classiques et le coût de la manœuvre optimale nous permet de valider à notre niveau le caractère optimal de la manœuvre calculée par l'algorithme. On s'attarde toutefois sur le fait que le coût de la manœuvre u_2 est relativement faible, et ne demande qu'une très petite durée de propulsion (inférieure à une minute). L'intérêt de cette manœuvre consiste à pousser très tôt pendant une durée très courte avec une poussée maximale, ce qui rend cette manœuvre beaucoup plus efficace qu'une manœuvre qui consisterait à pousser pendant la demi-heure quo précède l'instant prévu de la collision. Le coût de cette manœuvre est certes presque 100 fois plus élevé que le coût de la manœuvre optimale calculée par l'algorithme, ce qui est très contraignant, mais reste 100 fois inférieur aux manœuvres classiques, et le temps de poussée est très faible alors que celui de la manœuvre optimale s'étend sur les 12 heures mises à disposition.

L'ensemble de ces études nous permet de valider le caractère optimal de la solution calculée numériquement. On s'intéresse donc dans la partie suivante à la nature des solutions proposées par cet algorithme en fonction des paramètres d'entrée du problème d'évitement à résoudre.

2.2 Étude des solutions calculées

On s'intéresse dans cette partie à l'étude des manœuvres optimales calculées par notre algorithme pour une série de problèmes d'évitement de collision. Ces problèmes ont été conçus d'une part à partir de données réelles de collisions de satellites avec des débris, mais aussi d'autre part en imaginant des situations qui peuvent survenir pour un satellite dans des conditions opérationnelles en orbite. L'objectif a été de faire varier les paramètres d'entrée de notre algorithme afin de caractériser au mieux la nature des solutions, en fonction de ces paramètres d'entrée.

2.2.1 Protocole suivi

L'objectif de cette étude est donc présenter l'influence des paramètres suivants sur le contrôle optimal obtenu en sortie :

— $t_c - t_0$: durée disponible pour la manœuvre d'évitement,

— $\mathrm{d}t$: pas de temps pour la simulation,

— R_c : distance d'évitement minimale imposée.

On précise que la masse du satellite n'a pas d'influence sur la nature de la solution obtenue. En effet, l'équation 10 qui met en évidence la dynamique du satellite contrôlé ne dépend pas explicitement de la masse m, tant que l'on se limite à considérer un contrôle u en accélération. Par souci de généralisation, on considérera un satellite de masse $m_0 = 1$ kg, ce qui nous permettra de présenter le contrôle optimal $\tilde{u}$ homogène à une poussée en Newton N. Pour un satellite de masse m quelconque, les résultats présentés par la suite seront parfaitement applicables, avec un nouveau contrôle

$$\tilde{u}_m = \frac{m}{m_0}\tilde{u} \tag{30}$$

Pour cette étude, on a considéré un satellite sur une orbite circulaire à basse altitude (400 km). Une telle orbite nous permet de ne pas nous soucier de l'influence de la position $\overrightarrow{r}_c$ prévue de la collision sur l'orbite, contrairement au cas elliptique où on peut envisager que la manœuvre pourrait changer en fonction de la position prévue de la collision sur l'orbite. On a donc cherché à évaluer l'influence des paramètres $t_c - t_0$, R_c et $\mathrm{d}t$, en faisant la simulation pour plusieurs valeurs de $t_c - t_0$. Puis, pour chacune de ces simulations, on a fait varier les paramètres R_c et $\mathrm{d}t$ de façon adéquate. On présente dans la table 4 les différentes simulations réalisées.

Simulation no	$t_c - t_0$	R_c (m)	$\mathrm{d}t$
1.1.1	1 min	200 ± 20	1 s
1.1.2	"	200 ± 20	0.1 s
1.1.3	"	2000 ± 500	0.1 s
1.1.4	"	500 ± 50	0.1 s
1.2.1	30 min	500 ± 50	1s
1.2.2	"	500 ± 50	1 min
1.3.1	2h	500 ± 50	1min
1.4.1	12h	500 ± 50	15min

Table 4 – Tableau récapitulatif des simulations réalisées pour un satellite en orbite circulaire à basse altitude (400 km). On cherche à étudier avec ces simulations l'influence des paramètres $t_c - t_0$, R_c et $\mathrm{d}t$.

On présente dans la partie suivante les résultats obtenus et on conclut sur l'influence des paramètres d'entrée sur la nature de la manœuvre optimale calculée.

2.2.2 Analyse des résultats

On s'intéresse donc dans cette partie à l'analyse des solutions calculées dans les simulations présentées dans la partie précédente. L'ensemble des résultats obtenus est synthétisé dans la table 5.

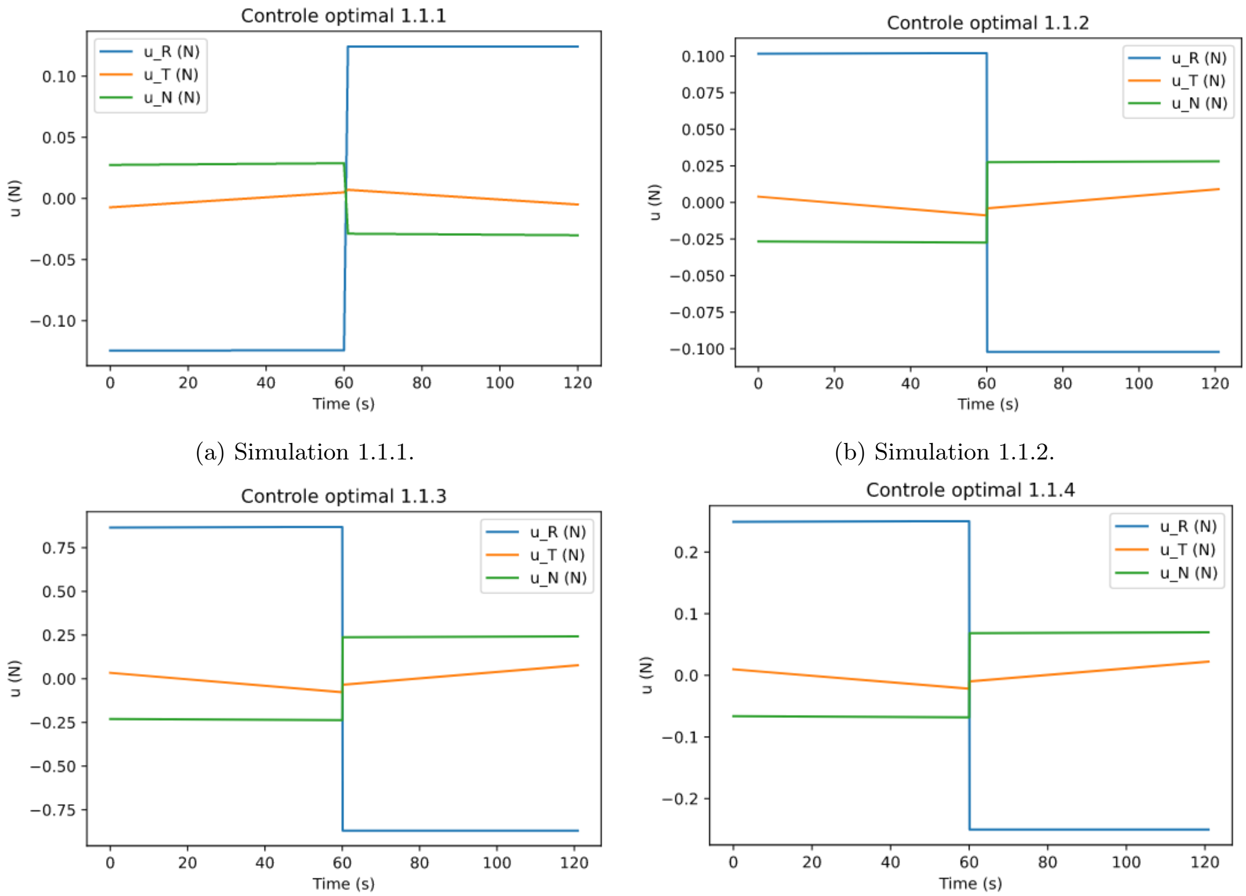
Simulation no	Manœuvre	Coût ($m^2.s^{-3}$)	Itérations	Temps de calcul	Plot
1.1.1	existe	0.977	1	9.87 s	figure 4a
1.1.2	existe	0.675	1	97.28 s	figure 4b
1.1.3	existe	49.055	1	85.96 s	figure 4c
1.1.4	existe	4.064	1	88.55 s	figure 4d
1.2.1	existe	0.000151	3	777.02 s	figure 5a
1.2.2	existe	0.000154	3	13.39 s	figure 5b
1.3.1	existe	7.186e-7	1	22.64 s	figure 6a
1.4.1	existe	4.146e-9	1	12.41 s	figure 6b

TABLE 5 – Tableau récapitulatif des résultats des simulations présentées dans la partie 2.2.1. On indique notamment dans la colonne "Manœuvre" si l'algorithme a bien trouvé une manœuvre d'évitement dans les conditions de simulation. Si c'est le cas, on indique le coût de cette manœuvre, le nombre d'itérations nécessaires pour le calcul de cette manœuvre, le temps de calcul, et on fait référence dans la dernière colonne à la figure qui représente l'évolution du contrôle optimal au cours du temps.

On invite très fortement le lecteur à consulter les figures 4, 5 et 6 pour visualiser les contrôles optimaux obtenus comme résultats de nos simulations. On constate à partir des résultats de la simulation 1.1 (figure 4) que pour une manœuvre de très courte durée ($t_c - t_0 = 1$ min), l'algorithme parvient à calculer une manœuvre optimale. On mentionne le fait que pour des valeurs de R_c élevées, il est nécessaire de donner une grande valeur de tolérance, sinon le calcul ne peut pas se faire. En effet, pour la simulation 1.1.3, on a souhaité imposer une distance $R_c = 1500 \pm 150$ m, mais aucune manœuvre n'a pu être calculée, alors qu'en imposant une distance $R_c = 2000 \pm 500$ m, on a pu obtenir une manœuvre. Ceci laisse à penser qu'une valeur de R_c trop importante provoque des écarts importants entre la valeur théorique attendue la valeur réelle obtenue de la quantité $\|\overrightarrow{r}(t_c) - \overrightarrow{r_c}\|_2$ prise en compte dans l'équation 11. On constate donc avec la simulation 1.1 qu'indépendamment de la valeur de R_c et de dt, le type de contrôle obtenu comme solution est le même pour une valeur de $t_c - t_0$ identique, avec une poussée constante dans la direction radiale dans la première phase, et une poussée constante dans la direction opposée dans la deuxième phase. Faire varier dt ne semble pas générer de contrôles différents (les contrôles 1.1.1 et 1.1.2 semblent identiques, à un signe près), et faire varier R_c n'entraîne qu'une simple augmentation de la valeur de la poussée dans chaque phase, ce qui est un résultat attendu.

Dans la simulation 1.2 (figure 5), on a cherché à faire varier la durée $t_c - t_0$ entre l'instant où l'alerte est lancée, et l'instant prévu de la collision, par rapport à la simulation 1.1. On a alors imposé $t_c - t_0 =$ 30min. Cette durée est la durée disponible pour faire la manœuvre. On constate que le fait de faire varier cette quantité nous permet d'obtenir des manœuvres d'évitement optimales très différentes de celles obtenues dans la simulation 1.1. On constate ensuite que le fait de modifier la valeur de dt entre les simulations 1.2.1 et 1.2.2 ne semble pas modifier le contrôle optimal obtenu en solution, comme on a pu le constater dans la simulation 1.1. Il est bien sûr important de garder une valeur de dt suffisamment petite pour que la simulation ait un sens, mais il ne semble pas nécessaire de prendre une valeur extrêmement petite en espérant gagner en précision au prix d'un coût en calcul très élevé (13 minutes de calcul pour la simulation 1.2.1, contre 13 secondes pour la simulation 1.2.2, pour obtenir deux manœuvres quasi identiques avec un écart de coût relatif de l'ordre de 2%.

Enfin, avec les simulations 1.3 et 1.4 (figure 6), on a cherché à nouveau à faire varier la durée $t_c - t_0$, avec $t_c - t_0 =$ 2h pour la simulation 1.3 et $t_c - t_0 =$ 12h pour la simulation 1.4. On constate que l'effet observé entre la simulation 1.1 et 1.2 se maintient avec les simulations 1.3 et 1.4. Pour des valeurs de $t_c - t_0$ élevées, la manœuvre optimale semble se transformer en une manœuvre de poussée continue et à très faible amplitude dans la direction tangentielle, là où elle se faisait dans la direction normale et à forte amplitude pour des valeurs de $t_c - t_0$ très faibles. En effet, les manœuvres obtenues dans les simulations 1.3 et 1.4 semblent avoir ce même profil. La simulation 1.2 ($t_c - t_0 = 30$ min) semble correspondre à un état de transition entre la simulation 1.1 ($t_c - t_0 = 1$ min) et les simulations 1.3 et 1.4 ($t_c - t_0 =$ 2h et $t_c - t_0 =$ 12h respectivement), avec une annulation progressive du contrôle dans les directions radiale et normale, et une amplification progressive du contrôle dans la direction tangentielle relativement aux autres directions. On constate aussi que le fait d'augmenter la valeur de $t_c - t_0$ conduit à des contrôles de plus en plus faible amplitude, avec des manœuvres



(a) Simulation 1.1.1.

(b) Simulation 1.1.2.

(c) Simulation 1.1.3.

(d) Simulation 1.1.4.

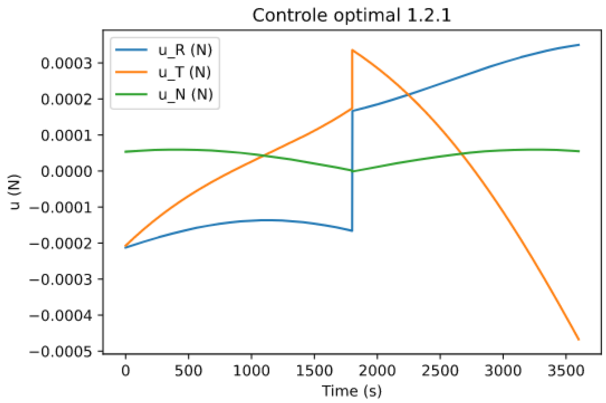
FIGURE 4 – Contrôles optimaux obtenus pour la simulation 1.1. On observe que indépendamment des paramètres dt et R_c, le type de manœuvre obtenue est le même, avec une poussée constante dans la direction radiale dans la première phase, puis une poussée opposée dans la seconde phase. Le paramètre dt ne semble pas jouer de rôle. En revanche, comme on pouvait s'y attendre, augmenter R_c provoque une augmentation de la valeur de la poussée dans les deux phases.

qui ont un coût de plus en plus faible (présence d'un facteur 10^{-5} entre la manœuvre de la simulation 1.2 et celle de la simulation 1.4, et d'un facteur 10^{-3} entre celle de la simulation 1.2 et celle de la simulation 1.3). Le gain en coût est très important quand on augmente la durée de la manœuvre, mais il est important de préciser que le temps de la manœuvre est aussi un critère à optimiser, car pendant toute la durée de la manœuvre, le satellite n'est pas en mesure d'accomplir sa mission en orbite.

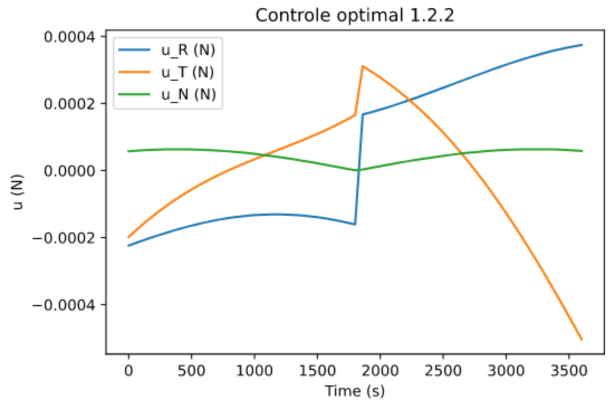
Cette analyse a donc eu pour objectif de mettre en évidence l'influence des paramètres d'entrée sur la nature de la manœuvre calculée en sortie et sur le coût de cette manœuvre. Cette étude montre qu'il est nécessaire de ne pas se limiter à des manœuvres "de dernières secondes", et qu'il serait pertinent d'envisager des manœuvres plus coûteuses en temps (2h d'opération au lieu de 15min), et qui permettraient de gagner un facteur 10^{-3} en coût.

Conclusion de la seconde partie

Au cours de cette deuxième partie du rapport, on a pu présenter le travail numérique qui nous a permis de proposer un module de calcul de manœuvre optimale d'évitement de collision à partir de la modélisation mathématique du problème proposée dans la partie 1, et à partir des résultats de l'analyse théorique qui

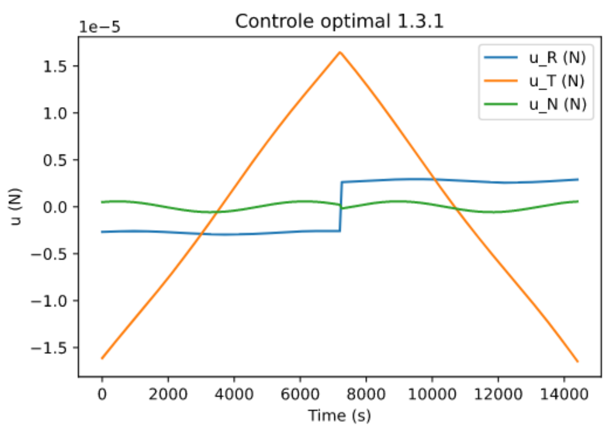


(a) Simulation 1.2.1.

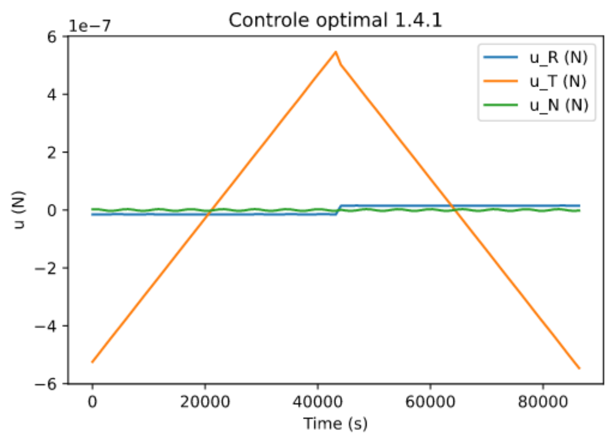


(b) Simulation 1.2.2.

FIGURE 5 – Contrôles optimaux obtenus pour la simulation 1.2. On observe que le fait d'augmenter le temps de manœuvre disponible $t_c - t_0$ conduit à des contrôles très différents de ceux obtenus dans la simulation 1.1. De plus, comme observé avec la simulation 1.1, modifier la valeur de dt ne semble pas modifier le contrôle obtenu en sortie.



(a) Simulation 1.3.1.



(b) Simulation 1.4.1.

FIGURE 6 – Contrôles optimaux obtenus pour les simulations 1.3 et 1.4. Les contrôles obtenus sont différents de ceux obtenus dans les simulations précédentes. On remarque que sur des durées $t_c - t_0$ plus longues, la manœuvre optimale consiste en une poussée très faible et continue dans la direction tangentielle, alors qu'elle se faisait dans la direction radiale dans la simulation 1.1.

a découlé de cette modélisation. Ce travail numérique représente pour nous un enjeu très important car cela nous a permis de donner une application concrète à des développements théoriques auxquels on a été habitué en tant que étudiants, en ne voyant que très rarement le lien que ces développements théoriques pouvaient avoir avec la réalité. L'enjeu derrière ce travail de recherche était de proposer un module pouvant être exploité dans l'industrie spatiale française. On a donc cherché à valider l'ensemble du code écrit en vérifiant méthodiquement chaque fonction écrite et chaque module implémenté, et à documenter tout le code et le travail de vérification associé. Cependant, ce travail de vérification est un travail continu et il est nécessaire de ne pas réduire sa vigilance. Après une première phase de vérification à notre niveau, on a cherché à caractériser le comportement du code et la nature des solutions proposées en fonction des données d'entrée. L'ensemble des protocoles de vérification et l'ensemble des données de simulation abordées dans cette partie sont disponibles dans le répertoire Git associé à ce projet, facilement accessibles et exploitables. Le travail de calcul de manœuvre optimale n'est cependant pas terminé, et on discute dans la partie suivante de quelques éléments d'approfondissement à apporter à ce travail.

Conclusion du rapport

Afin de répondre à la problématique d'évitement de collision en orbite pour un nanosatellite muni d'une propulsion électrique, le but de notre projet de recherche en laboratoire était de proposer une solution de calcul de manœuvre optimale d'évitement de collision. La démarche entreprise dans ce projet a donc été celle décrite dans ce rapport. Dans une première partie, nous avons proposé un modèle mathématique de notre problème d'évitement de collision. Cette modélisation mathématique nous a permis de déployer des calculs analytiques qui ont grandement simplifié le problème initial, en nous permettant de passer d'un problème d'optimisation à très grande dimension sous des contraintes non linéaires à un problème d'optimisation convexe dans $\mathbb{R}^{12}$. Cette simplification, tirée des observations physiques faites sur le problème initial, a permis de réduire considérablement les coûts de calcul nécessaires pour le calcul de la manœuvre optimale et de proposer un algorithme de calcul de manœuvre optimale qui présente des performances très intéressantes. L'implémentation numérique de cet algorithme nous a permis de mettre en évidence la nature des solutions optimales pour les manœuvres d'évitement de collision, sous les hypothèses formulées au cours du travail de modélisation. Ainsi, dans un cadre de recherche, ce projet nous a permis de mettre nos connaissances théoriques accumulées au cours de nos années d'étude au profit d'un problème industriel concret, et en cela ce projet a été une expérience très enrichissante.

Références

[1] Grégoire Allaire and Alexandre Ern. Map435 optimisation et contrôle. Lecture notes from École Polytechnique, 2020.

[2] R. H. Battin. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics.* AIAA education series, 1987.

[3] The Astropy Collaboration. The Astropy Project : Building an Open-science Project and Status of the v2.0 Core Package. ., 2018.

[4] Juan Luis Cano Rodríguez et al. poliastro/poliastro : poliastro 0.14.0 (COVID-19 edition). ., May 2020.

[5] Fabien Gachet. Map554 orbital dynamics. Lecture notes from École Polytechnique, 2020.

[6] Clement Gazzino. *Stratégies de maintien à poste pour un satellite géostationnaire à propulsion tout électrique. NNT : 2018TOU30001. tel-01705222v2.* PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III - Automatique / Robotique, 2018.

[7] Joseph Gergaud and Thomas Haberkorn. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem. *http ://dx.doi.org/10.1051/cocv :2006003*, 12, 04 2006.

[8] Pierre Martinon. *Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale.* PhD thesis, INP Toulouse, 11 2005.

[9] David A. Vallado and Wayne D. McClain. *Fundamentals of astrodynamics and applications*, volume The space technology library. Microcosm Press, 4th ed edition, 2013.

A Éléments de mécanique spatiale

A.1 Repérage en orbite

Les travaux de mécanique spatiale effectués dans ce rapport nécessitent d'introduire les repères de référence adéquats. On présente dans cette première partie de l'annexe deux repères de référence principaux, qui seront utilisés dans la suite des calculs.

A.1.1 Repère inertiel géocentrique

Le repère cartésien de référence considéré au cours de notre travail est le repère inertiel géocentrique, décrit par Gazzino [6] et dont on peut trouver une définition dans Vallado et al. [9] sous le nom de *Geocentric Equatorial Coordinate System* ou *Earth Center Inertial*. Ce repère a son origine au centre de la Terre représenté par le point G. Les axes sont définis par :

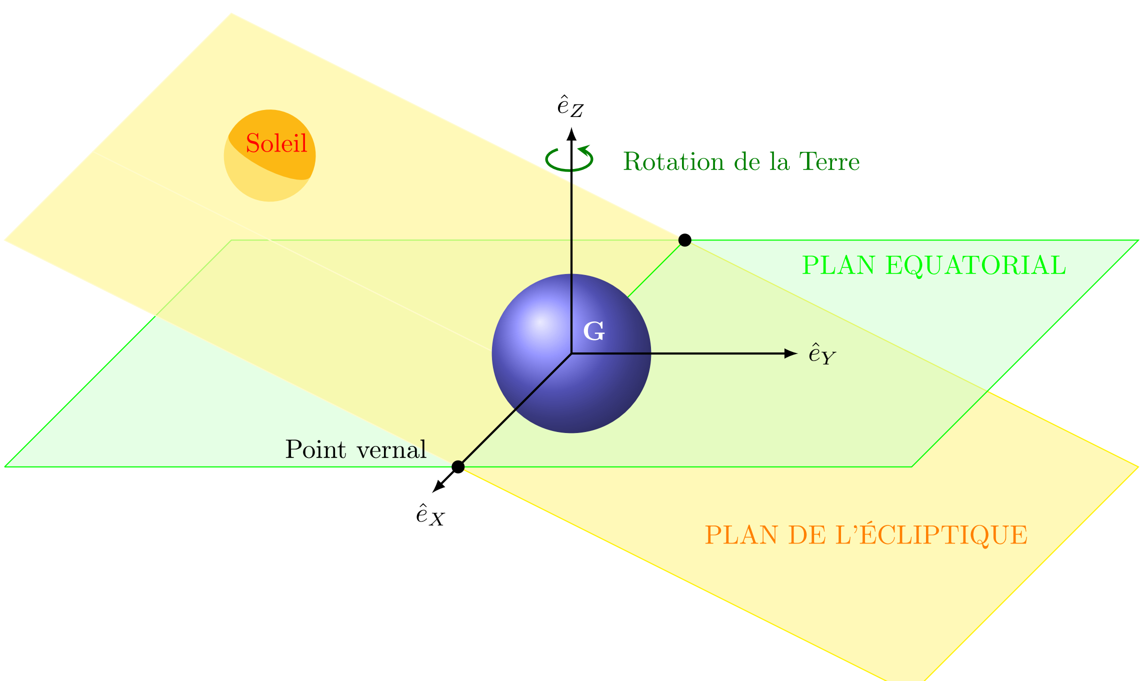


Figure 7 – Repère géocentrique inertiel.

— l'axe $(G,\, \hat{e}_Z)$ pointant vers le nord terrestre,
— l'axe $(G,\, \hat{e}_X)$ dans la direction de l'intersection entre le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur terrestre (point vernal),
— l'axe $(G,\, \hat{e}_Y\,)$ qui complète le trièdre orthogonal direct.

Ce repère est illustré dans la figure 7. Le repère $(G,\, \hat{e}_X,\, \hat{e}_Y,\, \hat{e}_Z)$ est noté $\mathcal{R}_G$ et la base associée $\mathcal{B}_G$.

Dans ce repère, un point de l'espace est représenté par ses trois coordonnées cartésiennes x, y et z.

A.1.2 Repère orbital local

On peut introduire un système de coordonnées liées à la position du satellite sur l'orbite. Il s'agit du repère orbital local. Ses axes peuvent être notés RTN, ou RSW comme dans Vallado et al. [9], et sont définis par :

— l'axe $\hat{e}_N$ colinéaire au vecteur moment cinétique $\overrightarrow{h}$,
— l'axe $\hat{e}_R$ radial, colinéaire à la direction Terre - satellite,
— l'axe $\hat{e}_T$ qui vient compléter le trièdre orthogonal direct RTN.

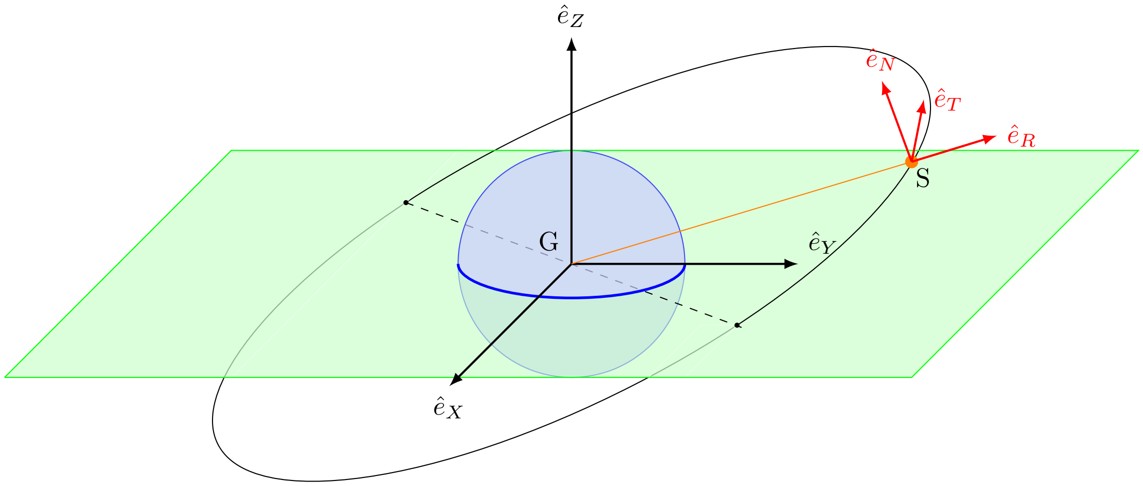


FIGURE 8 – Repère orbital local.

Ce repère est illustré dans la figure 8. On note S le point représentatif du satellite dans la base $\mathcal{B}_G$. Alors, le repère $(S,\, \hat{e}_R,\, \hat{e}_T,\, \hat{e}_N)$ est noté $\mathcal{R}_{OL}$ et la base associée est notée $\mathcal{B}_{OL}$.

Il est possible de définir le repère orbital local à partir de trois rotations transformant la base géocentrique inertielle $\mathcal{B}_G$ en la base orbitale locale $\mathcal{B}_{OL}$. La série de transformations est la suivante :

— une rotation autour de l'axe $(G,\, \hat{e}_Z)$ d'angle Ω,
— une rotation autour de l'axe $(G,\, \hat{e}_n)$ d'angle i,
— une rotation autour de l'axe $(G,\, \hat{e}_h)$ d'angle $\omega + \nu$.

où $\hat{e}_n$ est un vecteur unitaire dans la direction de l'intersection entre le plan de l'équateur et le plan de l'orbite et $\hat{e}_h$ est un vecteur directeur perpendiculaire au plan de l'orbite. La figure 9 montre ces rotations dans l'espace et la figure 10 présente les rotations planes associées à ces transformations.

A.2 Représentation d'état du mouvement

On s'intéresse dans cette partie à la représentation de l'état du système étudié. Le système étudié est un satellite assimilé à un point matériel soumis à la force centrale gravitationnelle exercée par la Terre, et soumis aux perturbations orbitales dont principalement le contrôle exercé par la propulsion électrique. La description complète de l'état du satellite nécessite la connaissance de six coordonnées généralisées constituant le vecteur d'état. Il existe plusieurs façons de représenter ce vecteur d'état. Le choix de la représentation se fait en prenant en compte la simplicité d'écriture des propriétés apparentes du mouvement et l'apparition possible de singularités du mouvement. On présente dans cette seconde partie de l'annexe trois représentations possibles.

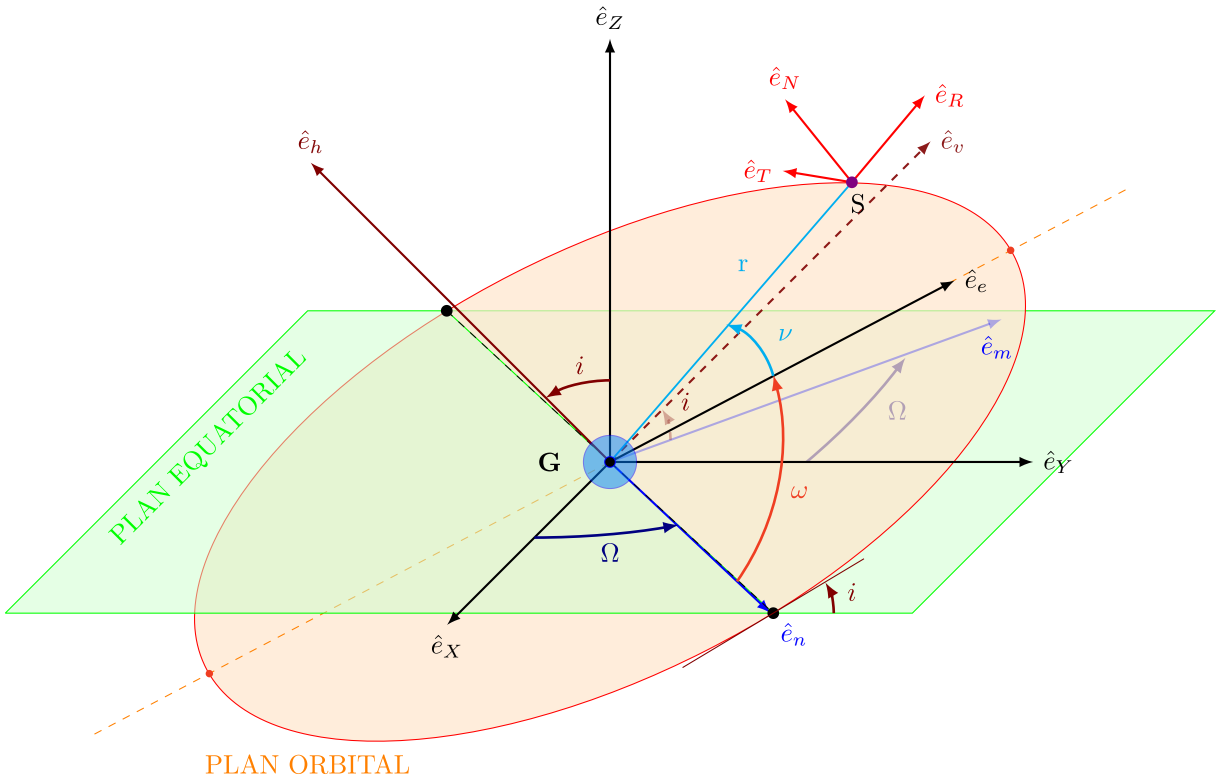


Figure 9 – Représentation des angles de rotation entre le repère géocentrique inertiel et le repère orbital local. Notons que $\hat{e_N}$ et $\hat{e_h}$ sont colinéaires.

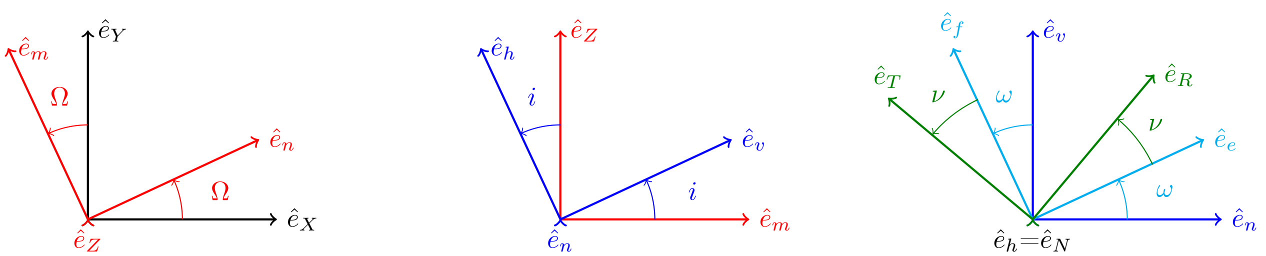


Figure 10 – Rotation planes entre la base géocentrique inertielle et la base orbitale locale.

A.2.1 Représentation cartésienne

Dans le repère inertiel géocentrique introduit dans la partie A.1.1, l'état du système peut être représenté par :

— la donnée du vecteur position $\overrightarrow{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_{R_G}^T = x\hat{e}_X + y\hat{e}_Y + z\hat{e}_Z$,

— la donnée du vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}_{R_G}^T = \dot{x}\hat{e}_X + \dot{y}\hat{e}_Y + \dot{z}\hat{e}_Z$.

On définit alors le vecteur d'état du système écrit en représentation cartésienne :

$$x_{\text{cart}}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T \tag{31}$$

A.2.2 Représentation en éléments orbitaux classiques

Dans le cas où le satellite ne subit que la force centrale gravitationnelle, la trajectoire est conique. De plus, si cette trajectoire est périodique, cette conique est une ellipse. Il devient alors possible de décrire l'état

du satellite avec les paramètres suivants (voir figures 9 et 11) :
— le demi grand-axe a de l'ellipse,
— l'excentricité e de l'ellipse,
— l'inclinaison i du plan de l'ellipse par rapport au plan de l'écliptique,
— l'ascension droite du nœud ascendant Ω : il s'agit de l'angle entre le point vernal et le point d'intersection de l'orbite avec le plan de l'ecliptique dans le sens montant de la trajectoire,
— l'argument du périgée ω : angle dans le plan de l'orbite entre le noeud ascendant et le périgée,
— un paramètre nommé **anomalie**, qui décrit la position du satellite sur son orbite au cours du temps.

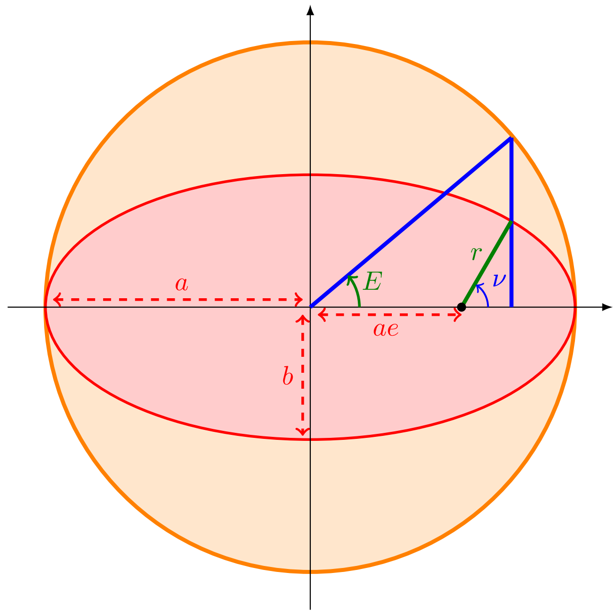


FIGURE 11 – Anomalie excentrique et anomalie vraie.

Ces six paramètres sont appelés éléments orbitaux képlériens, ou éléments orbitaux classiques (voir Battin [2]). La signification physique de ces éléments orbitaux est représentée sur le schéma de la figure 11. Trois types d'anomalies peuvent être introduites pour décrire la position du satellite sur son orbite au cours du temps :

— l'anomalie vraie ν,
— l'anomalie excentrique E,
— l'anomalie moyenne M.

L'anomalie vraie ν est l'angle entre la direction du périgée et la direction du vecteur position $\overrightarrow{r}$. L'anomalie excentrique E est un angle défini à l'aide du cercle circonscrit à l'ellipse dont le diamètre est le demi grand-axe de l'ellipse, tel que décrit dans la figure 11. L'anomalie moyenne M correspond à la position d'un corps qui se déplacerait sur une orbite circulaire circonscrite à l'ellipse, avec une période égale à celle du satellite. L'anomalie moyenne est donc reliée au temps par la relation

$$M(t) = M(t_0) + n(t - t_0) \tag{32}$$

où n est le mouvement moyen du satellite donné par

$$n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a^3}} \tag{33}$$

Les anomalies excentrique E et moyenne M sont reliées par l'équation de Kepler :

$$E - e \sin E = M \tag{34}$$

Ainsi, on peut définir le vecteur d'état du satellite écrit dans la représentation en éléments orbitaux classiques :

$$x_{\text{EOC}}(t) = \begin{bmatrix} a & e & i & \Omega & \omega & M(t) \end{bmatrix}^T \tag{35}$$

A.2.3 Représentation en éléments orbitaux équinoxiaux

Les éléments orbitaux classiques définis dans la partie précédente A.2.2 présentent deux cas singuliers : z
— lorsque l'orbite est circulaire, l'excentricité est nulle et l'argument du périgée ω n'est pas défini,
— lorsque l'orbite est dans le plan de l'équateur, l'inclinaison est nulle et l'ascension droite du noeud ascendant Ω n'est pas définie.

Pour palier ces problèmes, on introduit les éléments orbitaux équinoxiaux suivants :

$$\begin{cases} a \\ e_x = e\cos(\omega + \Omega) \\ e_y = e\sin(\omega + \Omega) \\ i_x = \tan(i/2)\cos(\Omega) \\ i_y = \tan(i/2)\sin(\Omega) \\ \text{anomalie équinoxiale} \end{cases} \tag{36}$$

Les anomalies pour les paramètres équinoxiaux sont généralement appelées longitude dans la littérature (Battin [2] par exemple). Par souci de clarté, en suivant le choix proposé par Gazzino [6] dont notre travail s'inspire en partie, on choisit de les renommer de la façon suivante :
— longitude vraie : L $\to$ anomalie équinoxiale vraie : $\nu_Q = \Omega + \omega + \nu$,
— longitude moyenne : l $\to$ anomalie équinoxiale moyenne : $M_Q = \Omega + \omega + M$,
— longitude excentrique : K $\to$ anomalie équinoxiale excentrique : $E_Q = \Omega + \omega + E$.

Ainsi, on peut définir le vecteur d'état du satellite écrit dans la représentation en éléments orbitaux équinoxiaux :

$$x_{\text{EOE}}(t) = \begin{bmatrix} a & e_x & e_y & i_x & i_y & M_Q(t) \end{bmatrix}^T \tag{37}$$

A.3 Mécanique orbitale

Après avoir identifié les différentes représentations d'un vecteur d'état, l'objectif de cette partie est d'obtenir les équations qui régissent l'évolution de ce vecteur d'état dans les différentes représentations. On s'intéresse dans un premier au mouvement képlérien, dans lequel le système n'est soumis qu'à la force d'attraction gravitationnelle. Puis, dans un second temps, on abordera le cas d'une trajectoire perturbée par une force non conservative. On verra que ces perturbations peuvent être prises en compte par les équations de Gauss, que l'on cherchera à exprimer dans la représentation qui nous intéresse. Le cas des perturbations dues aux forces conservatives prises en compte par les équations de Lagrange est un cas important à prendre en compte dans le cadre général de la mécanique spatiale, mais ce cas n'est pas pertinent dans le cadre de notre étude. On encourage le lecteur à consulter l'excellent cours de Mécanique Orbitale (MAP554 [5]) donné en enseignement aux élèves de troisième année de l'École polytechnique, s'il souhaite approfondir le sujet.

A.3.1 Mouvement képlérien

Dans le cas d'un satellite soumis uniquement à la force d'attraction gravitationnelle, le satellite est soumis à la dynamique décrite par les équations suivantes :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_G} = \vec{v} \tag{38a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_G} = -\mu_\oplus \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \tag{38b}$$

avec $\mu_\oplus = \mathcal{G} M_\oplus$ paramètre gravitationnel standard géocentrique où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle et $M_\oplus$ la masse de la Terre, que l'on peut réécrire :

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{cart}}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ -\mu_\oplus \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ -\mu_\oplus \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ -\mu_\oplus \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \end{bmatrix} \tag{39}$$

On peut ainsi montrer que les solutions de l'équation 38 sont des coniques. En utilisant le paramétrage polaire, on peut écrire l'équation de la conique sous la forme :

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\left(\nu\right)} \tag{40}$$

où les paramètres utilisés dans cette équation ont été introduits dans la partie A.2.2. En particulier, la valeur e détermine le type de conique :

— si $0 \leq e < 1$, alors la conique est une ellipse (ou un cercle dans le cas $e = 0$),
— si e $=$ 1, la conique est une parabole,
— si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

Ce n'est que dans le premier cas que la trajectoire est bornée et périodique, et que les éléments orbitaux classiques introduits en A.2.2 sont bien définis. C'est pour cela qu'on ne considérera pour la suite du travail que des trajectoires pour lesquelles l'excentricité est plus petite que 1.

Dans ce cas, il vient naturellement le vecteur état introduit dans l'équation 35 est soumis à la dynamique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{EOC}}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}^T = K(x_{\mathrm{EOC}}) \tag{41}$$

où n est le mouvement moyen, introduit dans l'équation 33.

La dynamique du satellite peut également être exprimée en utilisant les éléments orbitaux équinoxiaux, en considérant la relation de passage entre les éléments orbitaux classiques et les éléments équinoxiaux orbitaux qui peuvent s'écrire $x_{\mathrm{EOE}} = x_{\mathrm{EOE}}\left(x_{\mathrm{EOC}}\right)$, ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{EOE}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x_{\mathrm{EOE}}}{\partial x_{\mathrm{EOC}}} \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{EOC}}}{\mathrm{d}t} = K(x_{\mathrm{EOE}}) \tag{42}$$

où $\dfrac{\partial x_{\mathrm{EOE}}}{\partial x_{\mathrm{EOC}}}$ la matrice jacobienne de transformation des éléments orbitaux classiques vers les éléments orbitaux équinoxiaux. Cette matrice est définie par :

$$\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{EOC}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{e_x}{\sqrt{e_x^2+e_y^2}} & 0 & -e_y & -e_y & 0 \\ 0 & \dfrac{e_y}{\sqrt{e_x^2+e_y^2}} & 0 & e_x & e_x & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{i_x(1+i_x^2+i_y^2)}{2\sqrt{i_x^2+i_y^2}} & -i_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{i_y(1+i_x^2+i_y^2)}{2\sqrt{i_x^2+i_y^2}} & i_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

On remarque que la fonction K garde la même expression dans les équations 41 et 42.

A.3.2 Équations de Gauss

On cherche à modéliser dans cette partie l'action de la propulsion électrique sur la dynamique du satellite. On rappelle le modèle de la propulsion proposé dans la partie 1.1.1 dans l'équation 2. La propulsion électrique est modélisée au moyen d'un vecteur $u(t)$ écrit dans la base locale du satellite (consulter la partie A.1.2 pour l'introduction de la base orbitale locale) tel que :

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_R(t) & u_T(t) & u_N(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}}^T \tag{44}$$

Dans la représentation d'état cartésienne, la propulsion électrique modifie le système 38 pour donner :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_G} = \vec{v} \tag{45a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_G} = -\mu_\oplus \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} + \vec{u} \tag{45b}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur contrôle écrit dans la base $\mathcal{B}_G$. On remarque que le contrôle u, de faible amplitude, peut être vu comme une perturbation de la dynamique képlérienne. L'application de la théorie des perturbations sur les solutions du problème képlérien nous permet d'exprimer l'action de ce contrôle u sur le vecteur état écrit dans la représentation en éléments orbitaux classiques. On encourage le lecteur à consulter la partie 2.2 du cours de Mécanique Orbitale [5] pour se familiariser avec les détails des calculs effectués. On obtient donc ainsi les équations de Gauss présentées dans l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{EOC}}}{\mathrm{d}t} = K(x_{\text{EOC}}) + G_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}})u \tag{46}$$

La matrice $G_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}})$ est définie de la façon suivante :

$$G_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}) = \begin{bmatrix} \dfrac{2a^2e}{h}\sin\nu & \dfrac{2a^2p}{rh} & 0 \\ \dfrac{p}{h}\sin\nu & \dfrac{p}{h}(\cos E + \cos\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{r}{h}\cos(\omega+\nu) \\ 0 & 0 & \dfrac{r}{h}\dfrac{\sin(\omega+\nu)}{\sin i} \\ -\dfrac{p}{he}\cos\nu & \dfrac{r+p}{he}\sin\nu & -\dfrac{r}{h}\dfrac{\cos i}{\sin i}\sin(\omega+\nu) \\ \dfrac{b}{hae}(p\cos\nu - 2re) & -\dfrac{b(p+r)}{hae}\sin\nu & 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

L'équation perturbée 46 peut aussi être exprimée à partir des éléments orbitaux équinoxiaux de la façon suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{EOE}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x_{\mathrm{EOE}}}{\partial x_{\mathrm{EOC}}} \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{EOC}}}{\mathrm{d}t} = K(x_{\mathrm{EOE}}) + G_{\mathrm{EOE}}(x_{\mathrm{EOE}})u \tag{48}$$

La matrice de Gauss en éléments orbitaux équinoxiaux se déduit donc de la matrice de Gauss en éléments orbitaux classiques selon la formule :

$$G_{\mathrm{EOE}}(x_{\mathrm{EOE}}) = \frac{\partial x_{\mathrm{EOE}}}{\partial x_{\mathrm{EOC}}} G_{\mathrm{EOC}}(x_{\mathrm{EOC}}) \tag{49}$$

Il est possible d'exprimer cette matrice :

$$G_{\mathrm{EOE}}(x_{\mathrm{EOE}}) = \begin{bmatrix} \frac{2a}{nb}p_2 & \frac{2b}{nr} & 0 \\ \frac{b}{na^2}\sin\nu_Q & \frac{r}{nab}\left[e_x + \left(1 + \frac{b^2}{ar}\right)\cos\nu_Q\right] & -\frac{e_y r p_6}{nab} \\ -\frac{b}{na^2}\cos\nu_Q & \frac{r}{nab}\left[e_y + \left(1 + \frac{b^2}{ar}\right)\sin\nu_Q\right] & \frac{e_x r p_6}{nab} \\ 0 & 0 & \frac{rp_5}{2nab}\cos\nu_Q \\ 0 & 0 & \frac{rp_5}{2nab}\sin\nu_Q \\ -\frac{r}{nab}\left[(1+p_1)\frac{p_1}{e^2}\left(1 - \frac{b}{a}\right) + \frac{2b}{a}\right] & \frac{r}{nb(a+b)}p_2\left(1 + \frac{b^2}{ar}\right) & \frac{r}{nab}p_6 \end{bmatrix} \tag{50}$$

avec les variables p_1 à p_6 définies par :

$$p_1 = e_x \cos\nu_Q + e_y \sin\nu_Q \tag{51a}$$
$$p_2 = e_x \sin\nu_Q - e_y \cos\nu_Q \tag{51b}$$
$$p_5 = 1 + i_x^2 + i_y^2 \tag{51c}$$
$$p_6 = i_x \sin\nu_Q - i_y \cos\nu_Q \tag{51d}$$

Remarque : Comme présentée dans la discussion de la partie 2.1.2, la valeur du coefficient $b_{6,1}$ de la matrice $G_{\mathrm{EOE}}(x_{\mathrm{EOE}})$ a été à l'origine d'un problème numérique. En effet, dans la bibliographie, on trouve une formule erronée de ce coefficient. Tous les coefficients de la matrice $B(x)$ ont été recalculés dans ce projet. Les expressions de tous les coefficients trouvées dans la littérature ont été identiques aux expressions obtenues par nos calculs, sauf pour le coefficient $b_{6,1}$, pour lequel on a trouvé l'expression indiquée dans l'équation 50. La formule présentée est issue de nos calculs, faits à partir de la définition des équations de Gauss et de la définition des éléments orbitaux équinoxiaux. Dans le cas d'une orbite circulaire, ce coefficient fait intervenir numériquement une division par $e = 0$ qui provoque des comportements indésirables dans le code. On utilise alors, pour e petit, le relation suivante, calculée par développement limité :

$$\frac{p_1}{e^2}\left(1 - \frac{b}{a}\right) \underset{e \to 0}{=} \frac{e}{2}\cos\nu \tag{52}$$

Or, dans un premier temps, et malgré le fait d'avoir calculé la formule exacte pour ce coefficient, on a choisi d'implémenter numériquement la valeur initiale de ce coefficient obtenue dans la bibliographie. Les résultats obtenus n'étaient pas cohérents, et une recherche systématique de l'erreur au sein du code, dont la méthode a été décrite dans la partie 2.1.2, a permis de mettre en évidence l'action indésirable de l'erreur de ce coefficient dans les résultats obtenus et de retrouver des résultats cohérents.

On montre ainsi d'après l'équation 48 que la variable d'état $x(t) = x_{\text{EOE}}(t)$ est bien soumise à la dynamique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K(x) + B(x)u \tag{53}$$

où

$$K(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}^T \tag{54}$$

et

$$B(x) = G_{\text{EOE}}(x) \tag{55}$$

Ce qui est exactement le résultat énoncé au début de ce rapport dans la partie 1.1.1 dans l'équation 8. Ce résultat achève l'annexe A.

B Calcul de manœuvre optimale

Dans cette annexe, on présente l'ensemble des calculs effectués qui ont permis d'obtenir les résultats présentés dans la partie 1.1.1 pour l'expression de la dynamique linéarisée, et dans la partie 1.2.1 pour l'expression des solutions optimales recherchées.

B.1 Équations d'évolution linéarisées

On s'intéresse dans cette partie aux calculs qui permettent de passer d'une dynamique non linéaire présentée dans l'équation 8 et rappelée ici :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K(x) + B(x)u \tag{56}$$

à une dynamique linéaire. On rappelle l'expression des variables retenues dans l'équation 9 :

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t) \tag{57a}$$
$$u(t) = u_0(t) + \delta u(t) \tag{57b}$$

On cherche donc à calculer l'expression de $\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\delta x(t)$ et de $\delta u(t)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} \\
&= K(x) + B(x)(u_0 + \delta u) - K(x_0) - B(x_0)u_0 \\
&= K(x_0) + \left.\frac{\partial K}{\partial x}\right|_{x=x_0} \delta x + \left(B(x) + \left.\frac{\partial B(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \right) (u_0 + \delta u) - K(x_0) - B(x_0)u_0 \\
\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} &= \left[\left.\frac{\partial K}{\partial x}\right|_{x=x_0} + \left.\frac{\partial B(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} u_0 \right] \delta x + B(x_0)\delta u + \underbrace{\left.\frac{\partial B(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \delta u \delta x}_{\text{ordre 2}}
\end{aligned} \tag{58}$$

Comme on l'indique dans l'équation 10, on obtient finalement :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = A(t)\delta x + B(t)\delta u \tag{59}$$

avec :

$$A(t) = \left.\frac{\partial K}{\partial x}\right|_{x=x_0} + \left.\frac{\partial B(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} u_0 \tag{60}$$
$$B(t) = B(x_0(t)) \tag{61}$$

B.2 Solution optimale d'évitement

Dans cette partie, on cherche à calculer les solutions des problèmes de contrôle des systèmes Linéaires Quadratiques 17 et 18, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\min_{v} && J_1(v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_c} \|v\|_2^2 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\delta x(t_c) - \sigma\|_2^2 && \text{(62a)}\\
&\text{sujet à} && \forall t \in [t_0, t_c], \quad \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = A(t)\delta x + B(t)v && \text{(62b)}\\
& && \delta x(0) = 0 && \text{(62c)}\\
& && \sigma \quad \text{fixé} && \text{(62d)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\min_{v} && J_2(v) = \frac{1}{2}\int_{t_c}^{t_f} \|v\|_2^2 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\delta x(t_f) - \gamma\|_2^2 && \text{(63a)}\\
&\text{sujet à} && \forall t \in [t_c, t_f], \quad \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = A(t)\delta x + B(t)v && \text{(63b)}\\
& && \delta x(t_c) = \delta x(t_c) && \text{(63c)}\\
& && \gamma \quad \text{fixé} && \text{(63d)}
\end{aligned}$$

Comme mentionné dans l'introduction de la partie 1.2, on fait usage dans nos calculs des résultats du cours MAP435 [1]. L'application de la proposition 7.2.8 de ce cours permet d'énoncer, par l'application du Principe du Minimum de Pontryaguine (PMP) qu'il existe un unique contrôle optimal pour chacun des deux sous-problèmes 62 et 63. Le PMP fournit même l'expression explicite de contrôle optimal.

B.2.1 Contrôle optimal

On définit le hamiltonien de nos deux sous-problèmes :

$$H(t, x, p, u) = p^*(A(t)x + B(t)u) + \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 \tag{64}$$

L'application du PMP (Théorème 7.2.2 & Proposition 7.2.8, [1]) nous permet d'exprimer le contrôle optimal :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \overline{\delta u}(t) = \arg\min_{u} H(t, \overline{\delta x}(t), \overline{p}(t), u) \tag{65}$$

où $\overline{\delta x}(t)$ est la trajectoire optimale associée à ce contrôle optimal, et $\overline{p}(t)$ l'état adjoint associé. On a donc :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \overline{\delta u}(t) = -B(t)^*\overline{p}(t) \tag{66}$$

L'état-adjoint est défini par morceaux, comme solution des deux équations différentielles successives :

$$\begin{aligned}
&\forall t \in [t_0, t_c], \quad \frac{\mathrm{d}\overline{p}(t)}{\mathrm{d}t} = -A(t)^*\overline{p}(t), \quad \overline{p}(t_c) = \overline{\delta x}(t_c) - \sigma && \text{(67a)}\\
&\forall t \in]t_c, t_f], \quad \frac{\mathrm{d}\overline{p}(t)}{\mathrm{d}t} = -A(t)^*\overline{p}(t), \quad \overline{p}(t_f) = \overline{\delta x}(t_f) - \gamma && \text{(67b)}
\end{aligned}$$

On définit alors :

$$\tilde{A}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s & \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ \displaystyle\int_{t_c}^{t} A(s)\mathrm{d}s & \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{68}$$

On en déduit l'expression suivante :

$$\overline{p}(t) = \begin{cases} e^{\tilde{A}(t_c)^* - \tilde{A}(t)^*} \left(\overline{\delta x}(t_c) - \sigma\right) & \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ e^{\tilde{A}(t_f)^* - \tilde{A}(t)^*} \left(\overline{\delta x}(t_f) - \gamma\right) & \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{69}$$

puis :

$$\overline{\delta u}(t) = \begin{cases} B(t)^* e^{\tilde{A}(t_c)^* - \tilde{A}(t)^*} \left(\sigma - \overline{\delta x}(t_c)\right) & \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ B(t)^* e^{\tilde{A}(t_f)^* - \tilde{A}(t)^*} \left(\gamma - \overline{\delta x}(t_f)\right) & \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{70}$$

On remarque que les résultats que l'on vient d'obtenir dépendent des valeurs $\overline{\delta x}(t_c)$ et $\overline{\delta x}(t_f)$ que l'on va identifier dans la partie suivante.

B.2.2 Trajectoire optimale

On déduit de ce qui précède l'expression suivante de la trajectoire optimale :

$$\overline{\delta x}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)} B(s) B(s)^* e^{\tilde{A}(t_c)^* - \tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \left(\sigma - \overline{\delta x}(t_c)\right) & \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ \overline{\delta x}(t_c) + \displaystyle\int_{t_c}^{t_f} e^{\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)} B(s) B(s)^* e^{\tilde{A}(t_f)^* - \tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \left(\gamma - \overline{\delta x}(t_f)\right) & \text{si } t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{71}$$

On cherche alors à identifier les valeurs des grandeurs $\overline{\delta x}(t_c)$ et $\overline{\delta x}(t_f)$ pour trouver l'expression exacte de $\overline{\delta x}(t)$. On définit alors au préalable les matrices suivantes :

$$G = \int_{t_0}^{t_c} e^{\tilde{A}(t_c) - \tilde{A}(s)} B(s) B(s)^* e^{\tilde{A}(t_c)^* - \tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \tag{72}$$

et

$$\tilde{G} = \int_{t_c}^{t_f} e^{\tilde{A}(t_f) - \tilde{A}(s)} B(s) B(s)^* e^{\tilde{A}(t_f)^* - \tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \tag{73}$$

et on constate que :

$$\overline{\delta x}(t_c) = G\left(\sigma - \overline{\delta x}(t_c)\right) \tag{74a}$$

$$\overline{\delta x}(t_f) = \delta x(t_c) + \tilde{G}\left(\gamma - \overline{\delta x}(t_f)\right) \tag{74b}$$

ce qui nous permet de calculer les valeurs suivantes :

$$\overline{\delta x}(t_c) = (I_6 + G)^{-1} G\sigma \tag{75a}$$

$$\overline{\delta x}(t_f) = \left(I_6 + \tilde{G}\right)^{-1} \left(\overline{\delta x}(t_c) + \tilde{G}\gamma\right) \tag{75b}$$

et enfin, en faisant la remarque que :

$$I_6 - (I_6 + G)^{-1} G = (I_6 + G)^{-1} \tag{76}$$

on obtient les expressions du contrôle optimal et de la trajectoire optimale introduite dans les équations 22 et 23 dans la partie 1.2.1 :

$$\overline{\delta u}(t) = \begin{cases} B(t)^* e^{\tilde{A}(t_c)^* - \tilde{A}(t)^*} (I_6 + G)^{-1} \sigma & \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ B(t)^* e^{\tilde{A}(t_f)^* - \tilde{A}(t)^*} \left(I_6 + \tilde{G}\right)^{-1} \left(\gamma - \overline{\delta x}(t_c)\right) & \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{77}$$

$$
\overline{\delta x}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\tilde{A}(t)-\tilde{A}(s)} B(s)B(s)^* e^{\tilde{A}(t_c)^*-\tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s\, (I_6 + G)^{-1} \sigma \quad \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ \displaystyle\overline{\delta x}(t_c) + \int_{t_c}^{t_f} e^{\tilde{A}(t)-\tilde{A}(s)} B(s)B(s)^* e^{\tilde{A}(t_f)^*-\tilde{A}(s)^*} \mathrm{d}s \left(I_6 + \tilde{G}\right)^{-1} \left(\gamma - \overline{\delta x}(t_c)\right) \\ \quad \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{78}
$$

Ces résultats achèvent l'annexe B.

C Éléments de propulsion électrique

On cherche à présenter dans cette annexe quelques éléments sur la propulsion électrique nécessaires à prendre en compte pour la modélisation du problème d'optimisation de manœuvre d'évitement de collision à faible poussée.

C.1 Équation de Tsiolkovski

Les manœuvres en orbite sont réalisées grâce à la poussée générée par les propulseurs électriques dont est équipé le satellite étudié. Le principe de la poussée repose sur le principe de conservation de la quantité de mouvement totale du système {satellite + carburant}. On obtient alors :

$$
m\dot{v} = \dot{m}c \tag{79}
$$

où :
- — m est la masse du système {satellite + carburant},
- — v est la vitesse du satellite,
- — $\dot{m}$ est le taux de variation de la masse due à l'éjection du carburant,
- — c est la vitesse d'éjection du carburant.

Dans le cas où la vitesse d'éjection c est constante, on peut intégrer l'équation 79 sur la durée de propulsion. L'incrément de vitesse obtenu Δv s'exprime alors :

$$
\Delta v = c \ln \frac{m_0}{m_f} \tag{80}
$$

ou sous la forme :

$$
\frac{m_f}{m_0} = \exp\left(-\frac{\Delta v}{c}\right) \tag{81}
$$

Cette dernière équation est l'équation de Tsiolkovski, connue sous le nom de équation fondamentale de l'astronautique, ou *rocket equation*.

C.2 Poussée d'un propulseur

La poussée du propulseur T est donnée par la relation :

$$
T = \dot{m}c \tag{82}
$$

L'impulsion spécifique est définie par :

$$
\mathrm{Isp} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} T \mathrm{d}t}{g \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} \mathrm{d}t} \tag{83}
$$

où g est l'accélération de la gravité terrestre au niveau de la mer. Il s'agit du ratio de la poussée par le débit d'éjection du carburant. En supposant la poussée constante sur l'intervalle de temps pendant lequel la poussée a lieu, on peut réécrire :

$$\mathrm{Isp} = \frac{c}{g} \tag{84}$$

Dans les calculs menés dans ce rapport, on a considéré un contrôle en accélération u relié à la poussée T par :

$$u = \frac{T}{m} = \frac{\dot{m}}{m} c \tag{85}$$

La quantité de carburant alors consommée pendant la manœuvre peut s'écrire :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |\dot{m}| \mathrm{d}t \tag{86}$$

Ainsi, si on considère que la vitesse d'éjection c est constante pendant toute la manœuvre, et si on considère que le masse m du satellite ne varie que très peu au cours de la manœuvre (hypothèse discutée dans la remarque énoncée dans la partie 1.1.1), on constate que minimiser la quantité de carburant consommée revient à minimiser le critère

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_f} \|u\|_2 \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_f} \frac{c}{m} |\dot{m}| \mathrm{d}t = \frac{c}{m} J \tag{87}$$

Ceci explique la proposition de critère à optimiser dans l'équation 14 de la partie 1.1.3.

D Compléments d'optimisation

On présente dans cette annexe quelques éléments de calcul et d'approfondissement du travail présenté dans ce rapport.

D.1 Formulation du problème d'optimisation

On s'intéresse au problème d'optimisation des valeurs de σ et γ formulé dans la partie 1.2.2. On cherche à formuler ce problème sous la forme d'un problème d'optimisation quadratique (quadratic programming). Cette classe de problème a été abondamment étudiée dans la littérature, et il existe un certain nombre de modules Python qui permettent de résoudre facilement un problème appartenant à cette classe, d'où l'intérêt de ce travail de reformulation.

On introduit :
— la variable $X = \begin{pmatrix} \sigma \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12}$
— la matrice $P_\sigma = \begin{pmatrix} I_6 & O_6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{6,12}(\mathbb{R})$
— la matrice $P_\gamma = \begin{pmatrix} O_6 & I_6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{6,12}(\mathbb{R})$,

de telle sorte que l'on vérifie $\sigma = P_\sigma X$ et $\gamma = P_\gamma X$.

Alors, la fonction coût définie dans l'équation 25 peut s'écrire :

$$J(X) = \frac{1}{2} X^* P X \tag{88}$$

avec la matrice $P \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$ définie par :

$$P = P_\sigma^* L P_\sigma + (P_\gamma - M P_\sigma)^* N (P_\gamma - M P_\sigma) \tag{89}$$

$$P = \begin{pmatrix} L + M^* N M & -M^* N \\ -NM & N \end{pmatrix} \tag{90}$$

On observe aussi à partir des équations 20 et 21 que les matrices G et $\tilde{G}$ sont des matrices symétriques positives ce qui implique à partir de l'équation 26 que les matrices L et N sont symétriques positives. On en conclue que la matrice P est elle aussi symétrique positive :

$$P \in \mathcal{S}_{12}^+(\mathbb{R}) \tag{91}$$

Ce formalisme nous permet d'exprimer la contrainte 27 sous la forme :

$$AX = 0 \tag{92}$$

avec

$$A = M P_\sigma + \tilde{G} P_\gamma \tag{93}$$

Le problème d'optimisation présenté dans l'équation 29 peut alors être réécrit sous la forme suivante :

$$\min_X \quad J(X) = \frac{1}{2} X^* P X \tag{94a}$$

$$\text{sujet à} \quad AX = 0 \tag{94b}$$

$$C(X) = 0 \tag{94c}$$

avec $C(X) = C_2(\sigma, \gamma)$ définie dans l'équation 28 et rappelée ici :

$$C(X) = \|\overrightarrow{r}(x_0(t_c) + M P_\sigma X) - \overrightarrow{r_c}\|_2 - R_c \tag{95}$$

On notera alors $\overline{X}$ la valeur de la solution optimale de ce problème d'optimisation, et $\overline{J} = J(\overline{X})$ le coût optimal de ce problème.

La contrainte d'inégalité 29c a ici été réécrite sous la forme d'une contrainte d'égalité. Cette transformation est largement justifiée par les résultats numériques obtenus.

Cette fonction de contrainte n'est pas linéaire, et on s'intéresse dans la partie suivante à l'étude de cette fonction. On cherchera principalement à savoir si cette contrainte peut être écrite sous une forme linéaire, ce qui achèvera de transformer notre problème d'optimisation en un problème d'optimisation quadratique.

D.2 Étude de la contrainte d'évitement

On s'intéresse dans cette partie à l'étude de la contrainte 94c. Cette contrainte peut être réécrite sous la forme :

$$\|\overrightarrow{r}(x_0(t_c) + M P_\sigma X) - \overrightarrow{r_c}\|_2^2 = R_c^2 \tag{96}$$

On rappelle que l'on a (d'après l'équation 24) :

$$\delta x(t_c) = M P_\sigma X \tag{97}$$

donc, il vient naturellement que $\|x_0(t_c)\|_2 \gg \|M P_\sigma X\|_2$ dans le terme $\overrightarrow{r}(x_0(t_c) + M P_\sigma X)$ de l'équation 96. On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{r}(x_0(t_c) + M P_\sigma X) = \overrightarrow{r}(x_0(t_c)) + \left.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x}\right|_{x = x_0(t_c)} M P_\sigma X \tag{98}$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$R_c^2 = \|\overrightarrow{r}(x_0(t_c) + MP_\sigma X) - \overrightarrow{r_c}\|_2^2 \tag{99}$$

$$= \left\| \overrightarrow{r}(x_0(t_c)) + \left.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x}\right|_{x_0(t_c)} MP_\sigma X - \overrightarrow{r_c} \right\|_2^2 \tag{100}$$

$$= \left\| \overrightarrow{r}(x_0(t_c)) - \overrightarrow{r_c} + \left.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x}\right|_{x_0(t_c)} MP_\sigma X \right\|_2^2 \tag{101}$$

$$R_c^2 = \underbrace{\|\overrightarrow{r}(x_0(t_c)) - \overrightarrow{r_c}\|_2^2}_{\text{ordre 0 en } \|X\|_2} + \underbrace{2\,(\overrightarrow{r}(x_0(t_c)) - \overrightarrow{r_c})^* \left.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x}\right|_{x_0(t_c)} MP_\sigma X}_{\text{ordre 1 en } \|X\|_2} + \underbrace{\left\| \left.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x}\right|_{x_0(t_c)} MP_\sigma X \right\|_2^2}_{\text{ordre 2 en } \|X\|_2} \tag{102}$$

Si le terme d'ordre 1 en $\|X\|_2$ était négligeable par rapport au terme d'ordre 0, il aurait été possible d'écrire la contrainte d'évitement donnée par l'équation 94c sous la forme suivante :

$$KX = \alpha \tag{103}$$

$$K = 2\,(\overrightarrow{r}(x_0(t_c)) - \overrightarrow{r_c})^* \left.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x}\right|_{x_0(t_c)} MP_\sigma \tag{104}$$

$$\alpha = R_c^2 - \|\overrightarrow{r}(x_0(t_c)) - \overrightarrow{r_c}\|_2^2 \tag{105}$$

Si l'approximation était vérifiée, on constate que l'on peut donc écrire la contrainte d'évitement sous la forme d'une contrainte d'égalité linéaire, ce qui est l'objectif recherché. Cependant, cette approximation **n'est pas vérifiée** en pratique. En effet, le terme $\|\overrightarrow{r}(x_0(t_c)) - \overrightarrow{r_c}\|_2^2$ d'ordre 0 en $\|X\|_2$ traduit l'écart prévu entre le satellite et son obstacle au moment prévu de la collision, et cet écart peut être rendu arbitrairement petit (voire nul si la collision a réellement lieu) de telle que sorte que le terme d'ordre 1 en $\|X\|_2$ ne puisse plus être négligeable. On se retrouve donc dans l'impossibilité d'écrire notre contrainte sous la forme d'une contraire linéaire. Notre problème d'optimisation se limite donc à la forme donnée par l'équation 94.

D.3 Calcul de la durée optimale de manœuvre

Dans la modélisation du problème proposée dans ce rapport, on considère que les grandeurs t_0 et t_f, respectivement les instants de début et de fin de manœuvre, sont des données d'entrées du problème. Or, il est important de chercher à calculer les valeurs optimales de ces deux grandeurs. En effet, une manœuvre d'évitement présente un coup en énergie (ou en carburant) que l'on a étudié et qu'on a cherché à optimiser dans ce rapport, mais présente aussi et surtout un coût en temps. Pendant toute la durée de la manœuvre, le satellite n'est pas en mesure d'assurer sa mission principale en orbite et ceci représente un coût important à prendre en compte pour l'opérateur du satellite. On s'intéresse donc dans cette partie au calcul de la valeur optimale de ces paramètres t_0 et t_f.

A t_0 et t_f fixés, l'analyse présentée dans ce rapport est exploitable. On est donc capables de calculer à t_0 et t_f fixés les grandeurs $G = G(t_0, t_f)$ et $\tilde{G} = \tilde{G}(t_0, t_f)$. Ceci nous permet de définir de façon unique le problème d'optimisation donné par l'équation 94 et calculer la valeur optimale $\overline{X} = \overline{X}(t_0, t_f)$ du paramètre de ce problème d'optimisation. La grandeur

$$\overline{J} = J(\overline{X}(t_0, t_f)) = \overline{J}(t_0, t_f) \tag{106}$$

est donc le coût en énergie de cette manœuvre optimale donnée pour t_0 et t_f fixés.

On définit donc une nouvelle fonction de coût en temps $\tilde{J}$ telle que :

$$\tilde{J}(t_0, t_f) = \omega\,(t_f - t_0) + \overline{J}(t_0, t_f) \tag{107}$$

où ω est un paramètre de pénalisation du coût de la manœuvre en temps fixé par l'opérateur. On est donc amenés à calculer le couple $(\overline{t_0}, \overline{t_f})$ solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{t_0,t_f} \quad & \tilde{J}(t_0,t_f) && (108a)\\ \text{sujet à} \quad & t_0 \geq t_i && (108b)\\ & t_c \geq t_0 && (108c)\\ & t_f \geq t_c && (108d) \end{aligned}$$

où t_i correspond à l'instant de lancement de l'alerte et t_c l'instant prévu de la collision.

Cette formulation nous permet de calculer la manœuvre optimale comme compromis entre une manœuvre très coûteuse en temps, mais très économe en carburant, et une manœuvre très économe en temps mais très coûteuse en carburant. La nature du compromis, fixée par la quantité ω, est déterminée par l'opérateur en fonction de sa stratégie de manœuvre.

D.4 Quelques résultats de calcul

On présente dans cette partie quelques éléments de calculs qui permettent de réduire grandement la complexité des calculs effectués numériquement. On reprend donc le formalisme de l'annexe B.

Dans le cas où $u_0 = 0$, on a :

$$\begin{aligned} A(t) &= \left.\frac{\partial K}{\partial x}\right|_{x=x_0} && (109)\\ &= a_{6,1}\left(\delta_{i,6}\delta_{j,1}\right)_{1<i,j<6} && (110)\\ A(t) &= A && (111) \end{aligned}$$

La matrice $A(t)$ est donc une matrice constante, nulle partout sauf pour le coefficient $(6,1)$ qui est constant au cours de la manœuvre. De plus, A est nilpotente : $A^2 = 0$. Ces deux constats nous permettent d'écrire :

$$\tilde{A}(t) = \begin{cases} (t-t_0)A & \text{si} \quad t \in [t_0, t_c] \\ (t-t_c)A & \text{si} \quad t \in]t_c, t_f] \end{cases} \tag{112}$$

puis, pour tous t, s dans $[t_0, t_c]$ ou t, s dans $]t_c, t_f]$:

$$\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s) = (t-s)A \tag{113}$$

Enfin, on peut en déduire que pour tous t, s dans $[t_0, t_c]$ ou t, s dans $]t_c, t_f]$:

$$\begin{aligned} \exp\left(\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)\right) &= \exp\left((t-s)A\right) && (114)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (t-s)^n \frac{A^n}{n!} && (115)\\ \exp\left(\tilde{A}(t) - \tilde{A}(s)\right) &= I_6 + (t-s)\,A && (116) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$G = \int_{t_0}^{t_c} \left(I_6 + (t_c - s)\,A\right) B(s)B(s)^* \left(I_6 + (t_c - s)\,A^*\right) \mathrm{d}s \tag{117}$$

et

$$\tilde{G} = \int_{t_c}^{t_f} \left(I_6 + (t_f - s)\,A\right) B(s)B(s)^* \left(I_6 + (t_f - s)\,A^*\right) \mathrm{d}s \tag{118}$$

Ces quelques remarques permettent d'améliorer grandement la rapidité des calculs numériques.